О КОНСТРУКТИВНЫХ И КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Нахушев А.М.*, Нахушева В.А.

НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик
**niipma@mailru.com*

Развитие физики фракталов вызвало заметный интерес к физическим системам фрактальной структуры, совершающим колебания около положения устойчивого равновесия, образно говоря, — к фрактальным осцилляторам и моделирующим их уравнениям.

Уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{u''(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} + \omega^\alpha u(t) = 0\ ,\ \ 0 \le t \le T\ , \tag{1}$$

где Γ(x) — гамма-функция Эйлера; $1 < \alpha = \text{const} < 2$, t — независимая временная переменная, $\omega = \text{const} > 0$, $u = u(t)$ — зависящая переменная, Mainardi F. [1] назвал дробно-осцилляционным уравнением. При $\alpha \to 2$ оно совпадает с уравнением гармонического осциллятора [2, с.70].

Пусть: D_{0t}^{μ} — оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегро-дифференцирования;

$$sin_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha k+1}}{\Gamma(2+\alpha k)}\ ,\ \ cos_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)}\ .$$

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$D_{0t}^{\alpha-2} u''(t) + \omega^2 u(t) = 0\ ,$$

любое решение *u(t)* которого является решением уравнения (см [3])

$$u''(t) + \omega^\alpha D_{0t}^{2-\alpha} u(t) = 0\ . \tag{2}$$

Уравнение (2) отличается от предложенного Мейлановым Р.П. [2, с.78] уравнения «фрактального» осциллятора. Поэтому оно здесь названо регуляризованным уравнением фрактального осциллятора.

Любое решение уравнения (2) имеет вид

$$u(t) = \left[u'(0) + u(0)\frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{sin_\alpha(\omega\cdot t)}{\omega}\ . \tag{3}$$

Функции $\cos_\alpha(x) = \sin'_\alpha(x)$ и $\sin_\alpha(x)$, $x = \omega t$, имеют лишь конечное число нулей. При $\alpha \to 2$ формула (3) дает решение классического уравнения гармонического осциллятора.

1. Mainardi F.// Solitons and Fractals. 1996. V.7. №9. P.1461.
2. Нахушева В.А. Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. 100 с.
3. Нахушев А.М. // ДАН СССР. 1977. Т.234. №2. С.308.