



ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ ВИХРЕВЫХ ОБРАЗОВАНИЙ ВО ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ – СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Э.К. Лавровский, В.В. Фоминых¹

РЕЗЮМЕ. В рамках модели идеальной жидкости рассматривается вопрос о стационарных формах равновесия вихревых образований (линз или рингов) с неподвижным центром, находящихся в покоящемся стратифицированном океане. Рассматривается случай произвольной зависимости плотностей вихревого образования и океана от вертикальной координаты.

Ключевые слова: идеальная жидкость, вихревые образования, океан, формы равновесия, стратификация.

Для описания движения внутри вихревого образования рассмотрим уравнение (1)

$$[(2\bar{\Omega} + \text{rot } \bar{v}) \times \bar{v}] = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) - \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + gz\right) \quad (1)$$

Это уравнение Эйлера в форме Громека-Ламба в стационарном случае, где $\bar{\Omega}$ - угловая скорость вращения Земли; ρ, p - плотность и давление, \bar{v}, V - соответственно вектор относительной скорости частиц вихревого образования и его модуль. Рассмотрение ведется в связанной с вращающейся Землей системе координат. Предполагается, что поле сил гравитации и поле центробежных сил инерции внутри вихревого образования однородно, т.е. ускорение силы тяжести \mathbf{g} в уравнении (1) постоянно.

Пусть поле скоростей внутри вихревого образования имеет вид (2)

$$\begin{aligned} v_x &= \alpha(z)x + a_y(z)y + a_z(z) \\ v_y &= -\alpha(z)y + b_x(z)x + b_z(z), \quad v_z = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

т.е. вертикальные компоненты скоростей частиц равны нулю, а горизонтальные - линейно зависят от горизонтальных координат. $\alpha, "a", "b"$, а также плотность ρ , есть некоторые функции вертикальной координаты z . При этом уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (3)$$

выполняется автоматически. Уравнение (1) в скалярной форме имеет вид

$$\Phi_x \equiv \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega_z v_y \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4)$$

$$\Phi_y \equiv \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + 2\Omega_z v_x \right) = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \Phi_z \equiv \rho (g - 2v_x \Omega_y) = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Условие совместности (т.е. условие существования давления p) для уравнения (4) принимает вид (5)

¹ Институт механики Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова, e-mail: lavrov@imec.msu.ru.

$$\begin{aligned}\rho'[\alpha^2 + b_x(a_y - 2\Omega_z)] + \rho[2\alpha\alpha' + b'_x(a_y - 2\Omega_z) + b_x a'_y] &= 0, \\ \rho'[\alpha a_z + b_z(a_y - 2\Omega_z)] + \rho[\alpha(a'_z + 2\Omega_y) + b'_z(a_y - 2\Omega_z) + \alpha' a_z + a'_y b_z] &= 0, \\ 2\Omega_z(\rho'\alpha + \rho\alpha') &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\rho'[\alpha^2 + a_y(b_x + 2\Omega_z)] + \rho[2\alpha\alpha' + a'_y(b_x + 2\Omega_z) + a_y b'_x] &= 0, \\ \rho'[a_z(b_x + 2\Omega_z) - \alpha b_z] + \rho[a'_z(b_x + 2\Omega_z) - \alpha b'_z + 2a_y\Omega_y + b'_x a_z - \alpha' b_z] &= 0\end{aligned}$$

где функция $\rho = \rho(z)$ известна, а штрихом обозначена производная всех функций по этой вертикальной координате z .

Форма равновесия есть поверхность, на которой равны друг другу давления внутри вихревого образования и в океане, находящегося в состоянии гидростатического равновесия. При этом допускается разрыв скоростей по касательной на границе этих сред. Имеет место условие непротекания (равенства нормальных проекций скоростей на границе сред), которому в силу условий (1) и (2) можно придать вид (6)

$$\bar{v} \cdot \bar{n} = -\rho(z)\bar{v} \cdot \text{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial v_x}{\partial x}(v_x^2 - v_y^2) + v_x v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0 \quad (6)$$

Оба этих условия по давлениям и скоростям являются граничными условиями задачи.

Известно, что в случае линейной стратификации океана

$$p_f = p_f(0) - \rho_0 g z - 0.5 g z^2 \left. \frac{\partial \rho_f}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (7)$$

и однородности вихревого образования форма равновесия есть поверхность второго порядка [1] в координатах x, y, z . Здесь p_f, ρ_f - давление и плотность во внешней среде.

Рассмотрим решение задачи в общем случае: из уравнений (5) имеем первые интегралы

$$\rho b_x(b_x + 2\Omega_z) = c, \text{ т.е. } -a_y = b_x = -\Omega_z \pm \sqrt{(\Omega_z^2 + \frac{c}{\rho})} \quad (8)$$

и

$$\rho b_z(b_x + 2\Omega_z) = d$$

т.е.

$$b_z = d / \rho(b_x + 2\Omega_z) = db_x / c$$

$$a_z = \frac{2\Omega_y}{\rho(b_x + 2\Omega_z)} \int_0^z \rho b_x dz + \frac{h}{\rho(b_x + 2\Omega_z)} = \frac{2\Omega_y b_x}{c} \int_0^z \rho b_x dz + \frac{hb_x}{c}$$

Отсюда с учетом (2) и (6)

$$\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega_z\right) = \rho x b_x (-b_x - 2\Omega_z) = -cx, \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= \rho v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + 2\Omega_z\right) = \rho[-b_x y + a_z](b_x + 2\Omega_z) = -cy + 2\Omega_y \int_0^z \rho(z) b_x(z) dz, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho g - 2\Omega_y \rho v_x = \rho g - 2\Omega_y \rho[-b_x y + a_z] =\end{aligned}$$

$$= \rho(z)g + 2\Omega_y \rho(z)b_x(z)y - \frac{4\Omega_y^2}{c} \rho(z)b_x(z) \int_0^z \rho(z)b_x(z) dz$$

где функция b_x фактически является угловой скоростью точек вихревых образований на разных z - уровнях. Используя эти соотношения, можно показать, что давление внутри линзы определяется соотношением (9)

$$p(x, y, z) = \frac{c}{2}(x^2 + y^2) - 2y\Omega_y \int_0^z \rho(z)b_x(z) dz - g \int_0^z \rho(z) dz + \frac{4\Omega_y^2}{c} \int_0^z \rho(z)b_x(z) \left[\int_0^z \rho(z)b_x(z) dz \right] dz + p(0,0,0) \quad (9)$$

Таким образом, форма равновесия вихревого образования в каждом сечении по z представляет собой окружность с центром в точке x_0, y_0 , определяемыми формулой (10)

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{2\Omega_y}{c} \int_0^z \rho(z)b_x(z) dz \quad (10)$$

Радиус этой окружности $R(z)$ удовлетворяет относительно простой формуле (11), где $p_f = p_f(z), \rho_f = \rho_f(z)$ есть известные функции соответственно давления и плотности в океане (последние связаны соотношениями гидростатики $dp_f/dz = -g\rho_f$)

$$R = R(z) \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0(z))^2}$$

$$\frac{R^2(z)c}{2} = p_f(z) + g \int_0^z \rho(z) dz - p(0,0,0) = g \int_0^z [\rho(z) - \rho_f(z)] dz + [p_f(0) - p(0,0,0)] \quad (11)$$

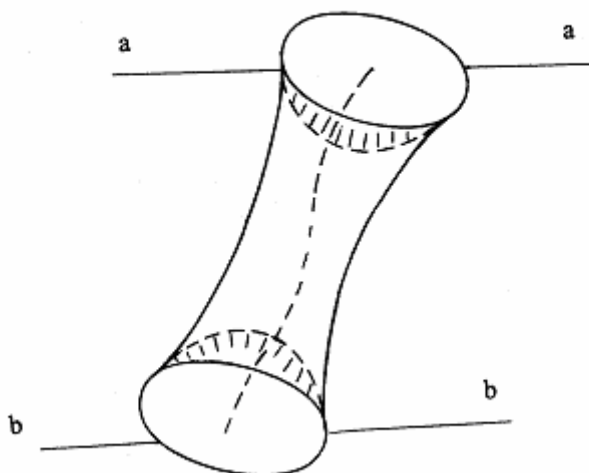
Формулы (10), (11) лежат в основе предлагаемого метода построения искомой поверхности: данный метод предполагает сначала построение оси (линии) центров вращений, а затем учет расстояния R от нее в каждом z - слое. При этом форма равновесия может оказаться теоретически как поверхностью замкнутой, так и незамкнутой в геометрическом смысле.

1. Данный метод позволяет, в частности, строить формы равновесия вихревых образований в многослойной внешней среде. Пусть, например, внешняя среда трехслойная. Слои сильно различаются по плотности: верхний слой – «легкая» вода, средний – «просто» вода (океан), нижний – «тяжелая» вода (рассол). В качестве верхнего слоя может выступать земная атмосфера (воздух), в качестве нижнего – либо зона повышенной солености, либо даже дно водоема, если плотность этого слоя стремится к бесконечности. Все слои имеют вертикальное распределение, но при контакте с линзой они могут слегка нарушать границы заявленных для них горизонтов. Плотности слоев различаются друг от друга резко, скачком.

Форма равновесия в этом случае имеет вид, изображенный на фиг.1. Она содержит центральный участок между горизонтами $a - a$ и $b - b$, возникший за счет взаимодействия вихревого образования с собственно океаном, и «лунки» вверху и внизу за счет взаимодействия с «легкой» и «тяжелой» водой. Пунктиром показана линия центров вращений при построении которой используется формула (10). Строго говоря, здесь показан случай положительной константы c первого интеграла (8). Этот случай отвечает либо циклоническому вращению вихревого образования, либо антициклоническому, но с достаточно большой по модулю угловой скоростью. Поэтому на центральном участке форма равновесия напоминает однополосный гиперболоид, а при контакте с «легкой» и «тяжелой»

водой образуются «лунки». Приблизительно «лунка» напоминает параболоид вращения, а ее «глубина» может быть посчитана по приближенной формуле (12), использующей линейное представление плотностей и то, что $R(z=0) = 0$

$$R^2(z)c \approx 2g \left[\int_0^z \rho(z) dz - \rho_f^1 z \right] \approx 2gz[\rho(0) - \rho_f^1] \quad (12)$$



Фиг.1

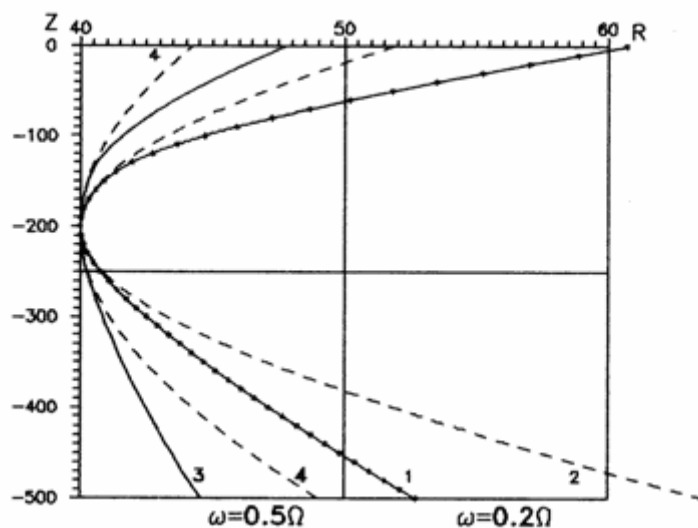
Наличие трех слоев внешней среды как бы превращает не замкнутую геометрически форму равновесия, характерную для циклона в «однослойном» океане, – в замкнутую. Эстаеся добавить, что в случае отрицательной константы C (это вихревое образование с антициклоническим характером вращения) центральный участок формы равновесия напоминает эллипсоид, а краевые участки уже не «лунки», а «горбы».

2. Данный метод позволяет при построении форм равновесия принимать во внимание реальные зависимости плотности океана, полученные на основании обработки экспериментального материала многочисленных океанографических экспедиций. При этом задачу приходится решать численно. Рассмотрим результаты некоторых таких построений форм равновесия для района северной Атлантики, вблизи побережья США, на северной широте 35 градусов. В этом месте соприкасаются несколько характерных зон распределения плотности [2] в океане – так называемые зоны I-1, I-2 и III-3. Пусть z_ρ - горизонт, на котором равны друг другу плотности океана и образования и на котором угловая скорость вихревого образования есть ω ; dp/dz - есть градиент плотности вихревого образования.

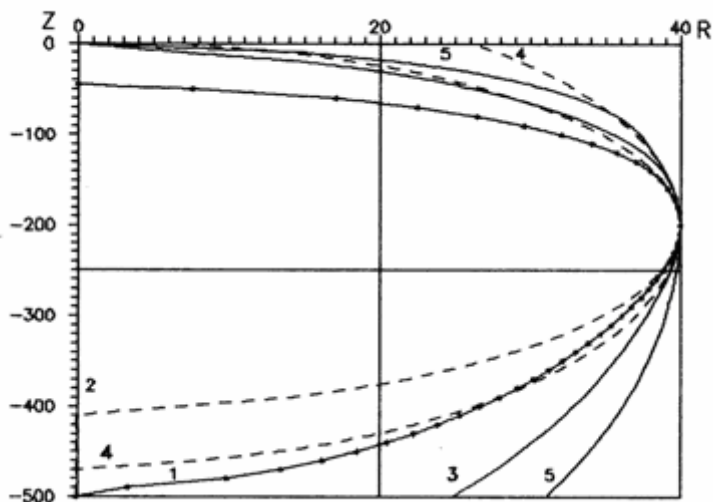
На фиг.2 показаны зависимости «радиусов» форм $R(z)$ от глубин в случае $\omega = 0.2\Omega$ и $\omega = 0.5\Omega$ при $z_\rho = 200$ м, $dp/dz = 0$ с условием, при $z = z_\rho$ радиус $R(z = z_\rho) = 40$ км (на остальных графиках также). По оси абсцисс отложены величины R в километрах, по оси ординат – глубины в метрах. Мысленное вращение той или иной из указанных на рисунке кривых вокруг вертикальной оси z (отвечающей $R = 0$) воссоздает качественную картину поверхности равновесия линзы. Сплошными линиями показаны зависимости $R(z)$ при учете реальной плотности океана в так называемой «западной» зоне II-3, а пунктиром – те же зависимости, но в случае, если плотность океана заменяется ее

линейным представлением по z . Отметки 1,2 относятся к кривым для случая $\omega = 0.2\Omega$, отметки 3,4 – к случаю $\omega = 0.5\Omega$. К тому же кривая 1 еще и маркирована. Показанные здесь формы равновесия не замкнуты. Видно, что разница между сплошной линией и отвечающей ей пунктирной тем меньше, чем больше ω . Графики дают примерное представление, какова в данном случае ошибка нахождения формы равновесия при линейной аппроксимации плотности океана и как отличаются формы равновесия при различных угловых скоростях линз отдельных параметров около этого режима.

На фиг.3 представлены аналогичные по смыслу графики для случая антициклона при $\omega = -0.2\Omega$ и $\omega = -0.5\Omega$. Здесь формы равновесия – замкнутые поверхности.



Фиг.2

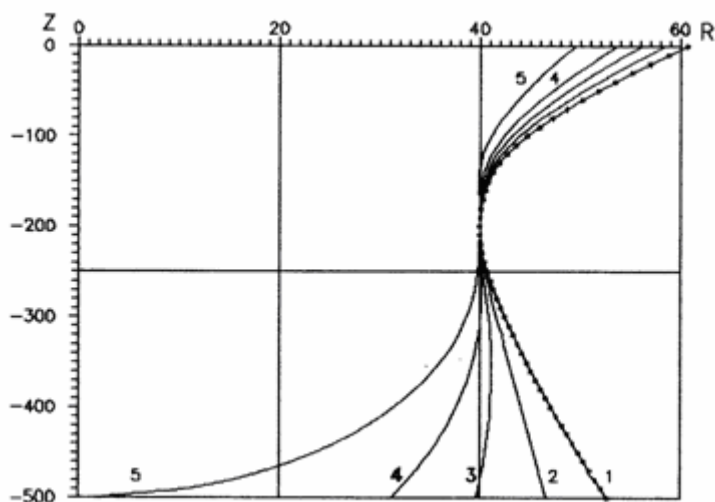


Фиг.3

На фиг.4 представлены графики для случая $\omega = 0.2\Omega$, $z_p = 200$ м, $dp/dz \neq 0$ и зоны III-3. Цифры 1-5 относятся соответственно к случаям изменения условной плотности σ_t линзы на 0, 0.1, 0.2, 0.3 и 0.46 единиц $г/см^3$ на каждые сто метров от уровня 200 метров. Обращает на себя внимание последний из этих графиков с номером 5, который отвечает замкнутой снизу форме равновесия с максимальным горизонтом залегания $z = 500$ метров. Он как бы состоит из незамкнутого циклонического верха (типа половинки однополостного гиперboloида) наверху и замкнутого антициклонического низа (напоминающего по форме половинку эллипсоида) внизу; наличие такой «смешанной» формы объясняется более быстрым ростом плотности линзы на глубоких горизонтах в сравнении с ростом плотности самого океана. Так на глубине $z = 500$ метров эта плотность составляет $\sigma_t = 27.66$ условных единиц, а плотность океана всего $\sigma_t = 26.75$. Впрочем, плотность $\sigma_t = 27.66$ не представляется в зоне III-3 чем-то совсем мало реальным: именно такую плотность океан имеет на глубине 2.5-3 километра.

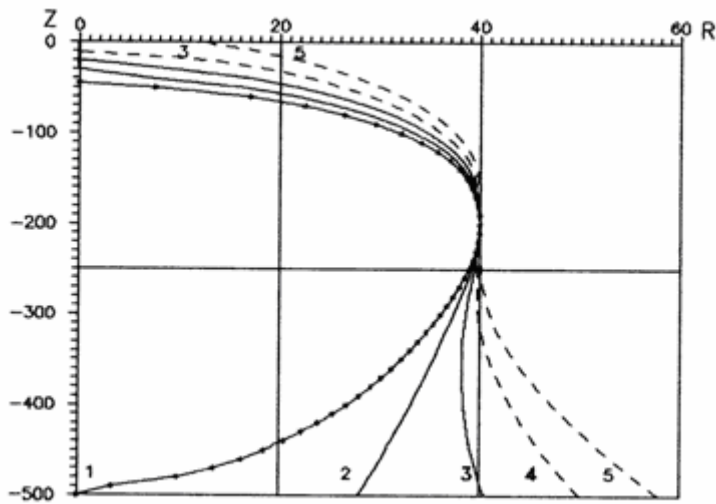
На фиг.5 представлены кривые «параллельного» случая, но уже для антициклона с $\omega = -0.2\Omega$. Здесь мы имеем совершенно противоположную картину, чем на фиг.4. И здесь наиболее характерна кривая с номером 5. Рост величины R на ее «глубоких» горизонтах объясняется сменой знака константы C и более высокой плотностью тела линзы в сравнении с окружающим океаном.

Представленные на фиг. 4 и 5 кривые доказывают, что изменение плотности внутри линзы может являться еще одним фактором, способным изменять замкнутый геометрически характер формы равновесия на не замкнутый и наоборот.

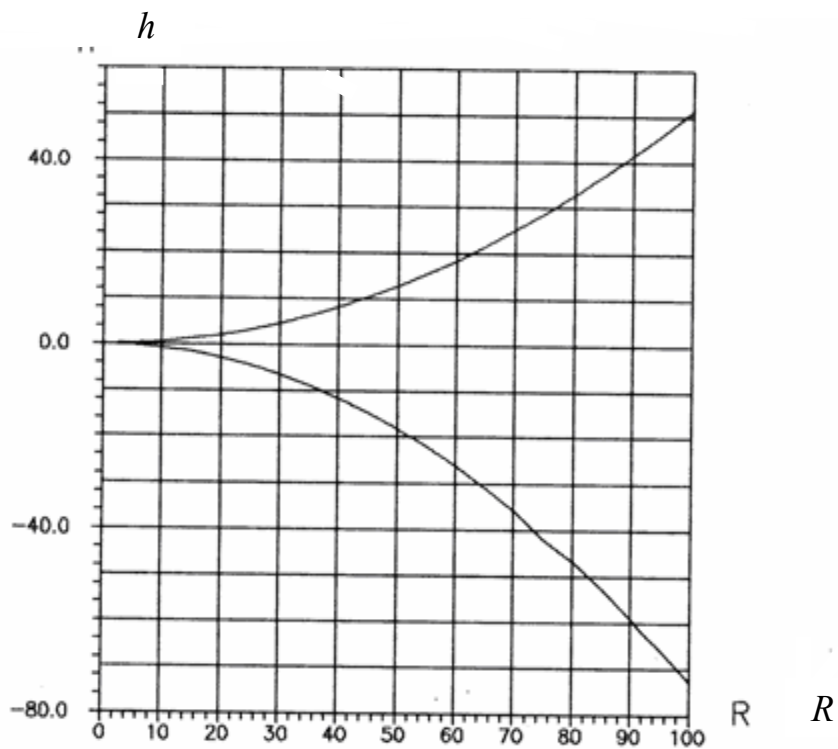


Фиг.4

На фиг.6 показаны зависимости h - высот «горбов» или глубин «лунок» от R - радиусов вихревых образований при их выходе на поверхность океана. Значения h даны в сантиметрах, величины R - в километрах. Расчеты выполнялись в соответствии с формулой (12). «Горбы» (им отвечают положительные h) определялись в случае $\omega = -0.2\Omega$, $z_p = 200$ м для распределения плотности океана по зоне III-3, глубины «лунок» вычислялись для «параллельного» случая - при $\omega = 0.2\Omega$. При данных скоростях вращения вихревых образований реальные глубины «лунок» не должны превосходить одного метра, что совпадает с данными спутниковых измерений.



Фиг.5



Фиг.6

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.К.Лавровский, Л.Н.Слезкин, И.П.Семенова, В.В.Фоминых. Средиземноморские линзы –жидкие гироскопы. ДАН, т.375, №1, 2000, стр. 42-45.
2. Поле плотности северной части Атлантического океана. Мос. отделение Гидрометеоиздата, Москва, 1985 г., 190 с.