

# О ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ В ИОНИЗУЮЩЕМСЯ ГАЗЕ И ЕЕ СВЯЗИ С ОСТАТОЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

*Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, М. В. Чеготов\**

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 декабря 2002 г.

При помощи гидродинамических расчетов по модели работы [1], дополненной учетом ионизационного тока [2–5], а также расчетов на основе численного решения нестационарного одномерного уравнения Шредингера, исследована генерация гармоник низкого порядка при прохождении через газ короткого ионизирующего лазерного импульса с учетом условий пространственно-временного фазового синхронизма. Показано, что гидродинамическая модель с ионизационным током при описании спектра третьей гармоники находится в хорошем согласии с квантовомеханической моделью. В этом случае амплитуда третьей гармоники определяется напряженностью лазерного поля в момент максимальной скорости ионизации, что позволяет связать ее с величиной остаточной энергии электронов [5–8]. Это может служить основой для диагностики остаточной энергии по спектру третьей гармоники, что является важным для исследований по созданию рентгеновских лазеров на ионизационно-неравновесной плазме.

PACS: 42.65, 52.38, 52.70

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие активно исследуются процессы, происходящие при оптической ионизации газа мощным коротким лазерным импульсом (см., например, [1–10] и цитированную там литературу). Помимо фундаментального интереса, это связано с перспективами использования генерирующихся при этом гармоник лазерной частоты для получения источников коротковолнового излучения и генерации аттосекундных электромагнитных импульсов [11, 12], а также с возможностью использования информации о спектре гармоник для диагностики процессов в ионизируемом газе.

Гармоники воздействующего на газ мощного лазерного импульса могут генерироваться как за счет коллективных процессов — тормозного излучения электронов при их столкновении с любыми ионами образующейся в результате ионизации плазмы [13], — так и за счет индивидуального нелинейного отклика системы «ионизирующийся электрон + родительский ион» на лазерное поле. Для эффективной генерации гармоник по первому механизму необ-

ходима весьма высокая плотность вещества, близкая к твердотельной [14], при этом эффективность тормозного механизма может быть увеличена за счет предварительного возбуждения ионизируемого лазерным импульсом газа [15]. В настоящей работе рассматривается генерация гармоник низкого порядка в поле фемтосекундного лазерного импульса при сравнительно небольшой плотности ионизируемого газа в пренебрежении тормозным механизмом генерации гармоник.

К настоящему времени можно считать установленной точку зрения, согласно которой генерация гармоник высокого порядка, проявляющихся в спектре поперечного поля в виде «плато» [10], происходит при излучательной рекомбинации ионизованного электрона при его повторном движении в поле родительского иона. Для описания этого процесса используются как чисто квантовомеханические [10, 16], так и полуклассические методы [17]. К настоящему времени отсутствует общепринятая точка зрения о механизмах генерации гармоник низкого порядка, суммарная энергия которых значительно превышает энергию гармоник высокого порядка в области «плато». Есть предположения, что генерация гармоник низкого порядка обусловлена связан-

\*E-mail: chegotov@ihed.ras.ru

но-связанными переходами электронов между уровнями энергии атома [18]. Кроме того, существует простая гидродинамическая модель, предложенная в работе [1], в которой рассматривается генерация гармоник вследствие того, что при туннельной ионизации концентрация электронов возрастает дважды за период в моменты времени, соответствующие максимальной напряженности лазерного поля. Эта модель очень привлекательна в силу своей простоты, позволяющей самосогласованно исследовать генерацию гармоник с учетом распространения лазерного импульса на значительные расстояния. Однако до последнего времени оставался неясным вопрос, насколько адекватно феноменологическая модель работы [1] может описывать реальную физическую ситуацию.

Для прояснения этого вопроса в разд. 3 настоящей работы проведено исследование генерации гармоник с использованием как гидродинамической, так и квантовомеханической моделей (описанных в разд. 2). Кроме того, исследовано поведение амплитуд гармоник в зависимости от количества связанных состояний в потенциальной яме. В отличие от работы [18], где исследован спектр второй производной по времени дипольного момента атома в поле заданного лазерного импульса, в настоящей работе исследуется спектр распространяющегося в ионизирующемся газе генерируемого излучения с учетом условий фазового пространственно-временного синхронизма. Последнее естественным образом учитывается при самосогласованном решении уравнения Шредингера и уравнений Максвелла. Показано, что третья гармоника несущей частоты лазерного излучения хорошо описывается гидродинамической моделью работы [1], дополненной учетом ионизационного тока, обеспечивающего выполнение законов сохранения энергии и импульса лазерного поля при ионизации газа [2–5]. Это значит, что ее амплитуда целиком определяется параметрами ионизационного фронта и напряженностью лазерного поля в области ионизационного фронта. В этом случае можно связать величину третьей гармоники с величиной остаточной энергии электронов. Последняя есть энергия, необратимо перешедшая от лазерного поля к электронам при их неадиабатическом взаимодействии с полем в момент ионизации [6]. Величина остаточной энергии определяет эффективность генерации когерентного рентгеновского излучения в схемах с рекомбинационной накачкой [8]. Поэтому принципиальная возможность диагностики остаточной энергии по спектру третьей гармоники важна для построения рентгеновских лазеров с активной

средой, образующейся при ионизации газа интенсивным оптическим лазерным импульсом. Заметим, что трехмерное распространение третьей гармоники в нелинейном веществе изучалось, в частности, в работе [19].

Модель, связывающая спектр третьей гармоники с величиной остаточной энергии, построена в разд. 4. Поскольку процесс получения остаточной энергии образовавшимся при ионизации газа электроном, так же как и генерация гармоник, является, строго говоря, квантовомеханическим процессом, представляет интерес приведенное в разд. 4 сравнение применяемых при расчете остаточной энергии гидродинамических формул [6] с квантовомеханическим расчетом остаточной энергии.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В наиболее общей форме в рамках классической электродинамики генерация гармоник лазерного излучения в ионизируемом газе может быть описана при помощи уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (1)$$

и соответствующих уравнений для дипольного момента электронов в единице объема газа,

$$\mathcal{P} = -e \sum_j \langle \mathbf{r}_j \rangle$$

(сумма берется по всем электронам в этом объеме, а угловые скобки означают усреднение по волновой функции этих электронов,  $\langle \hat{f} \rangle = \langle \Psi | \hat{f} | \Psi \rangle$  для оператора  $\hat{f}$ ;  $e$  — модуль заряда электрона; вкладом движений ионов пренебрегается). В приближении среды, состоящей из невзаимодействующих одноэлектронных атомов, имеем

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = -en_{at}(\mathbf{r}, t) \int \mathbf{r}_a |\Psi(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_a)|^2 d\mathbf{r}_a. \quad (2)$$

Здесь  $n_{at}$  — суммарная концентрация атомов и ионов, равная начальной концентрации газа (далее она считается не зависящей от времени),  $\mathbf{r}_a$  — внутриатомные координаты с центром в соответствующем атомном ядре,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор атомного ядра,  $\Psi$  — одноэлектронная волновая функция, подчиняющаяся уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + [U(\mathbf{r}_a) + \widehat{V}_f(\mathbf{r}_a, t)] \Psi, \quad (3)$$

где дифференцирование по пространству проводится по внутриатомным координатам,  $U(\mathbf{r}_a)$  — атомный потенциал,  $\widehat{V}_f(\mathbf{r}_a, t)$  — оператор взаимодействия электронов с полем.

Из формул (1) и (2) получаем следующее волновое уравнение для безразмерного высокочастотного поля  $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m\omega_0 c$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \Delta_{\perp} \right) \mathbf{a} = N\mathbf{R}, \quad (4)$$

$$\mathbf{R} = -a_{a.u.} \frac{\partial^2 \langle \mathbf{r}_a \rangle}{\partial t_a^2}. \quad (5)$$

Здесь  $\xi = k_0(x - ct)$  и  $\eta = k_0 x$  — связанная с лазерным импульсом безразмерная система координат (лазерный импульс распространяется вдоль оси  $x$ ),

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$\omega_0$  и  $k_0 = \omega_0/c$  — частота и волновой вектор лазерного излучения в вакууме,  $N \equiv n_{at}/n_c$ ,

$$n_c = \frac{m\omega_0^2}{4\pi e^2}$$

— критическая концентрация,

$$a_{a.u.} \equiv \frac{eE_{a.u.}}{m\omega_0 c}, \quad E_{a.u.} = \frac{m^2 e^5}{\hbar^4}$$

— атомная напряженность поля, источник  $\mathbf{R}$  предполагается выраженным в атомных единицах  $e = \hbar = m = 1$ ,  $c = 137$ , при этом  $t_a$  — время, выраженное в атомных единицах,

$$\frac{\partial}{\partial t_a} = -\frac{\omega_0}{\omega_{a.u.}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \omega_{a.u.} = \frac{me^4}{\hbar^3}$$

— атомная частота. Воспользовавшись тем, что, как следует из (3),

$$\frac{\partial \langle \mathbf{r}_a \rangle}{\partial t_a} = \langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle + i \langle [\widehat{V}_f, \mathbf{r}_a] \rangle,$$

где  $\widehat{\mathbf{p}} = -i\nabla$  — оператор канонического импульса, и учитывая явный вид оператора  $\widehat{V}_f$  в калибровке длины, получаем в дипольном приближении (пренебрегая зависимостью поля от координаты  $\mathbf{r}_a$ ), что

$$\mathbf{R} = -a_{a.u.} \frac{\partial}{\partial t_a} \langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A} = \hbar\mathbf{A}/mce$  — безразмерный вектор-потенциал (влиянием потенциальных полей  $-\nabla\varphi$  на генерацию гармоник пренебрегаем). Выражение (6) с помощью

уравнения (3) легко привести к виду (в рассматриваемом дипольном приближении)

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + a_{a.u.} \langle \nabla U(\mathbf{r}_a) \rangle. \quad (7)$$

Таким образом, в соответствии с (5), (6) и (7), для вычисления источника  $\mathbf{R}$  необходимо определить любую из трех величин:  $\langle \mathbf{r}_a \rangle$ ,  $\langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle$ ,  $\langle \nabla U(\mathbf{r}_a) \rangle$ . Наиболее последовательно (при наименьшем числе допущений) эта задача может быть реализована путем численного решения уравнения Шредингера (3). В последнее время разработаны различные методы такого решения [20–23], однако эта задача остается очень трудоемкой, тем более, имея в виду необходимость ее многократного решения для интегрирования волнового уравнения (4). По этой причине большие значения приобрели приближенные методы вычисления величины  $R$ , такие как численное решение одномерного уравнения Шредингера для модельного одномерного атома [24, 25], а также приближенное аналитическое вычисление величин  $\langle \mathbf{r}_a \rangle$  [16] и  $\partial \langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle / \partial t_a$  [10] при различных допущениях. Главными среди них являются, во-первых, допущение о слабом влиянии связывающего потенциала на часть волновой функции, соответствующей непрерывному спектру, во-вторых, допущение о пренебрежении всеми связанными состояниями, кроме основного, и, в третьих, допущение о слабом влиянии истощения основного уровня и его штарковского уширения. Отметим, что допущение о незначительной роли связывающего потенциала в области непрерывного спектра приводит к тому, что соответствующие аналитические теории, строго говоря, становятся плохо применимыми для рассматриваемых в представляемой работе гармоник низкого порядка с номерами, меньшими  $U_1/\hbar\omega_0$  [16], где  $U_1$  — энергия основного состояния рассматриваемого связывающего потенциала. О другой причине возможной неточности аналитических квантовомеханических теорий применительно к расчету третьей гармоники, связанной с третьим из вышеуказанных допущений, говорится в работе [26].

Трудности, связанные с вычислением волновой функции ионизирующегося электрона и с последующим вычислением источника  $\mathbf{R}$  в любой из форм (5)–(7), представляются неизбежными в случае определения гармоник высокого порядка, проявляющихся в спектре поперечного поля в виде «плато» [10], генерация которых происходит при излучательной рекомбинации ионизовавшегося электрона при его повторном движении в поле родительского иона [10, 16]. В то же время ниже будет показано, что низкочастотную часть спектра

поперечного поля, включающую третью гармонику, в которой сосредоточена большая часть энергии поля (за вычетом энергии несущей), можно описать значительно проще. Для этого в рассматриваемом ниже режиме туннельной ионизации [27], реализующемся в случае достаточно коротких и интенсивных лазерных импульсов [28], достаточно знать лишь «мгновенную» частоту ионизации, например, в форме, приведенной в работе [29]. Идея такого описания была впервые выдвинута в работе [1]. Ниже показывается, что феноменологическая модель, представленная в работе [1], может хорошо описывать низкочастотную часть спектра, если наряду с учитываемым в ней током свободных электронов  $\mathbf{J} = -en_e \mathbf{V}$ , где  $n_e$  — концентрация, а  $\mathbf{V}$  — гидродинамическая скорость электронов, учесть также «ионизационный» ток, связанный с потерями энергии и импульса лазерного излучения на ионизацию газа [2–4]:

$$\mathbf{J}_{ion} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{z=1}^{z_n} W_z U_z n_{z-1}. \quad (8)$$

Здесь  $U_z$  — потенциал ионизации ионов с кратностью ионизации  $z-1$ ,  $n_{z-1}$  — их концентрация,  $W_z$  — частота их ионизации,  $z_n$  — заряд ядра. При этом производная от поляризуемости определяется как сумма токов  $\mathbf{J} + \mathbf{J}_{ion}$ . В результате, в соответствии с уравнениями (1) и определением (4), источник  $\mathbf{R}$  вычисляется как

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{cn_{at}e} \frac{\partial(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{ion})}{\partial \xi} \quad (9)$$

(в безразмерных координатах). Таким образом, в рамках данной модели, которую далее называем «гидродинамической», для определения  $\mathbf{R}$  достаточно найти концентрации  $n_{z-1}$ , частоты ионизации  $W_z$  и гидродинамическую скорость  $\mathbf{V}$ . Концентрация электронов в предположении, что она не отличается от квазинейтрального значения, определяется как

$$n_e = \sum_{z=1}^{z_n} z n_z.$$

В приближении слабого релятивизма величина  $\mathbf{V}$  находится из уравнения [6, 7, 30]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{\mathbf{V} S}{n_e}, \quad (10)$$

где  $S = n_{at} \partial Z / \partial t$ ,

$$Z = \frac{\sum_{z=1}^{z_n} z n_z}{n_{at}} \quad (11)$$

— средний заряд ионов,  $S$  — скорость ионизации, для которой в приближении последовательной ионизации электронных уровней справедливы уравнения

$$\begin{aligned} S &= \sum_{z=1}^{z_n} S^{\{z\}}, \quad S^{\{z\}} = W_z n_{z-1}, \\ \frac{\partial n_z}{\partial t} &= S^{\{z\}} - S^{\{z+1\}}, \quad z = 1, \dots, z_n - 1, \\ \frac{\partial n_{z_n}}{\partial t} &= S^{\{z_n\}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из уравнений (8)–(11) в приближении слабого релятивизма и медленно (за лазерный период) меняющейся амплитуды несущей получаем следующее окончательное выражение для  $\mathbf{R}$  в гидродинамической модели:

$$\mathbf{R} = Z \mathbf{a} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \mathbf{a} \sum_{z=1}^{z_n} \frac{U_z}{U_H} \frac{n_{z-1}}{n_c} \frac{W_z}{|\mathbf{a}|^2 \omega_0} \right\}, \quad (13)$$

где  $\alpha \equiv e^2 / \hbar c$ ,  $U_H$  — потенциал ионизации водорода. Второй член в правой части (13) связан с учетом ионизационного тока. Выражение (13) дополняется формулой для частот ионизации  $W_z$ . В рассматриваемом режиме туннельной ионизации, когда параметр Келдыша [27]

$$\gamma = \frac{\omega_0 \sqrt{2mU_z}}{e|\mathbf{E}|} \ll 1,$$

возможно использовать адиабатическое приближение, подставляя в формулу для частоты ионизации в постоянном поле модуль напряженности мгновенного поля  $|\mathbf{E}|$  [31]. При этом можно представить  $W_z$  в виде

$$\begin{aligned} W_z &= C_z \omega_{a.u.} \left( \frac{a_{a.u.}}{|\mathbf{a}|} \right)^{\beta_z} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2}{3} \frac{a_{a.u.}}{|\mathbf{a}|} \left( \frac{U_z}{U_H} \right)^{3/2} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C_z$  и  $\beta_z$  — постоянные, зависящие от формы атомного потенциала. Уравнения (11)–(14) полностью определяют задачу нахождения  $\mathbf{R}$  в гидродинамической модели.

### 3. СРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И КВАНТОВОГО РАСЧЕТА АМПЛИТУД ГАРМОНИК

Рассмотрим вопрос о применимости сформулированной выше гидродинамической модели, сравнивая

результаты решения волнового уравнения с «гидродинамическим» источником (13) и с квантовомеханическим источником. Как говорилось выше, аналитические квантовомеханические теории для расчета  $\mathbf{R}$  могут быть недостаточно точны в низкочастотной области спектра. По этой причине расчеты с гидродинамическим источником (13) целесообразно, в первую очередь, сравнивать с численными квантовомеханическими расчетами, для чего удобно использовать  $\mathbf{R}$  в форме (7).

Считая, что поперечный размер  $\sigma_r$  лазерного импульса достаточно велик, а пройденное в ионизируемом газе расстояние  $x$  достаточно мало,  $x < k_0 \sigma_r^2 / 2$ , а также принимая во внимание узкую угловую направленность излучения гармоник [32], решаем волновое уравнение (4) в одномерной геометрии, пренебрегая поперечным лапласианом. При этом поляризацию лазерного импульса считаем линейной и направленной вдоль оси  $y$ ,  $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_y$ . Уравнение Шредингера также решаем в одномерной геометрии для модельного одномерного одноэлектронного связывающего потенциала, при этом используем калибровку длины и дипольное приближение:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t_a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_a^2} + \left( \frac{a}{a_{a.u.}} \right) y_a \Psi + U(y_a) \Psi. \quad (15)$$

Потенциал  $U(y_a)$  считаем короткодействующим,

$$U(y_a) = -2u \exp\left(-\frac{y_a^2}{\sigma_y^2}\right), \quad (16)$$

где величины  $\sigma_y \sim 1$  и  $u \sim 1$  выбираются таким образом, чтобы основной уровень энергии совпадал с соответствующим атомным, с которого происходит ионизация. Для потенциала (16) константы  $\beta_1$  и  $C_1$  в формуле (14) равны, соответственно,  $\beta_1 = 0$  и

$$C_1 = \sqrt{\frac{U_1}{U_H}} \left[ \lim_{y_a \rightarrow \infty} \Psi_1(y_a) \exp\left\{|y_a| \sqrt{\frac{U_1}{U_H}}\right\} \right]^2, \quad (17)$$

где  $\Psi_1(y_a) = \Psi(y_a, t = 0)$  — волновая функция связанного состояния. Помимо соображений простоты, такой выбор потенциала связан с тем, что для не слишком малых концентраций газа  $n_{at}$  размах колебаний электрона в поле лазерного излучения  $2r_E = 2eE/m\omega_0^2$  может быть настолько велик, что влияние соседнего атомного остатка окажется таким же, как и родительского: для этого  $2r_E$  должно превысить половину расстояния между соседними атомами  $n_{at}^{-1/3}/2$ , что достигается при

$$0.3 \frac{I(\xi_z)}{10^{14} \text{ Вт/см}^2} \left( \frac{\lambda_0}{1 \text{ мкм}} \right)^4 \left( \frac{n_{at}}{10^{18} \text{ см}^{-3}} \right)^{2/3} > 1,$$

где  $I(\xi_z)$  — лазерная интенсивность в момент максимальной скорости ионизации. Таким образом, уже при сравнительно небольших интенсивностях лазерного излучения и умеренных плотностях газа потенциал ионизируемого атома нельзя рассматривать как потенциал уединенного атома. В частности, это означает, что часть уровней энергии возбужденных состояний уединенного атома, сгущающихся к границе континуума состояний свободного электрона, переходит в непрерывный спектр и потенциальная яма атомного остатка содержит лишь конечное количество уровней энергии связанных состояний так же, как это имеет место для короткодействующего потенциала.

В дальнейшем с помощью потенциала (16) будет исследована зависимость спектра распространяющегося в ионизируемом газе излучения от количества связанных состояний в атомной потенциальной яме. Количество связанных состояний можно изменять с помощью изменения  $u$  и  $\sigma_y$  таким образом, что помимо связанного состояния с основным уровнем энергии в потенциальной яме оказываются два, три и т.д. уровней энергии. При этом константы  $\sigma_y$  и  $u$  будем выбирать таким образом, чтобы энергия основного состояния была постоянной и равной  $U_1 = 24.6$  эВ, что соответствует потенциалу однократной ионизации гелия из основного состояния.

При выборе  $\sigma_y = 1$  и  $u = 0.807$  основное состояние с  $U_1 = 24.6$  эВ оказывается единственным связанным состоянием в потенциальной яме. Для этого случая на рис. 1а представлены результаты вычислений безразмерной скорости ионизации

$$\frac{S}{n_{at}\omega_0} = \omega_0^{-1} \frac{\partial Z}{\partial t},$$

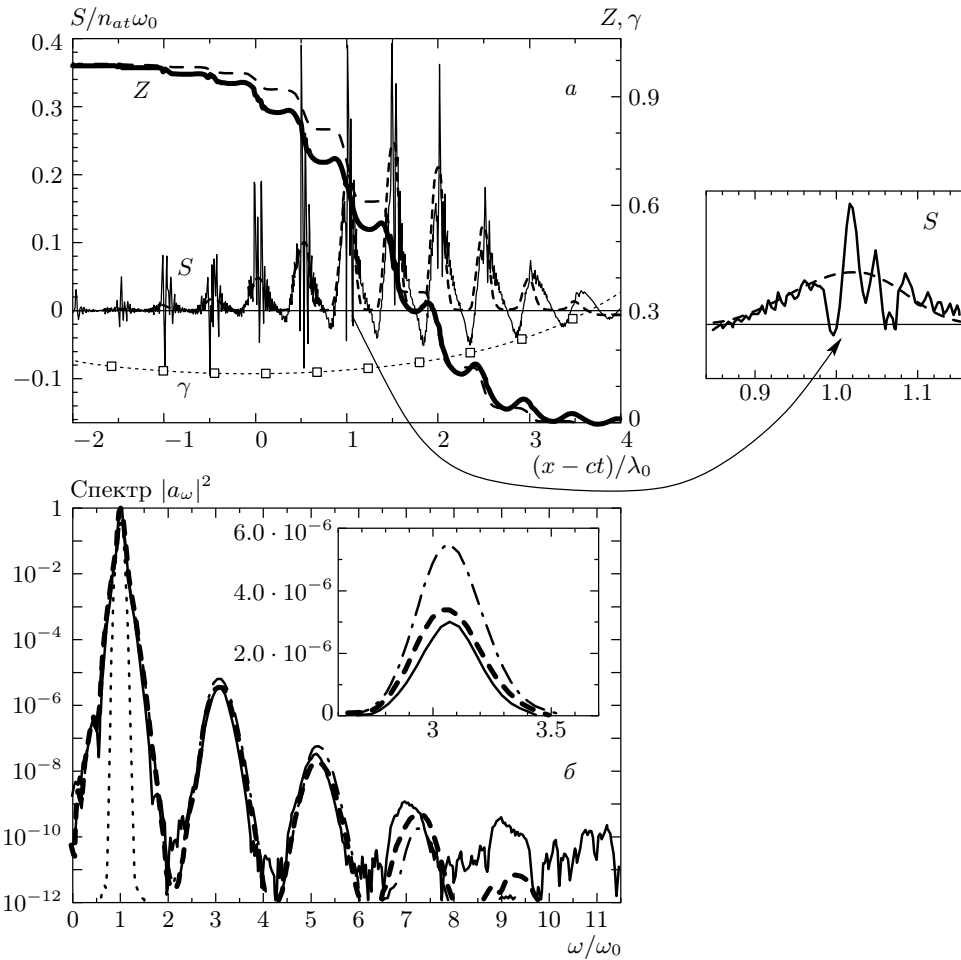
параметра Келдыша  $\gamma$  и среднего заряда ионов  $Z$ , определяемого в гидродинамических расчетах по формуле (11), а в квантовомеханических расчетах — по формуле

$$Z = 1 - \sum_n |\langle \Psi | n \rangle|^2, \quad (18)$$

где  $|n\rangle$  — волновая функция  $n$ -го связанного состояния, на рис. 1б — результаты вычислений нормированного на максимум спектра поперечного электромагнитного поля  $|\hat{a}(k)|^2$ ,

$$\hat{a}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \exp(-ik\xi) d\xi$$

— фурье-образ высокочастотного поля. На рис. 1а видно, что в рассматриваемом случае туннельной



**Рис. 1.** *a* — безразмерная скорость ионизации  $S(t)/n_{at}\omega_0$ , средний заряд ионов  $Z$  (сплошные линии — из решения уравнения Шредингера (15), штриховые — гидродинамический расчет по формулам (11), (12), (14)), параметр Келдыша  $\gamma$  — пунктирная линия. *б* — спектр поперечного электромагнитного поля при прохождении лазерным импульсом слоя газа толщиной  $x = 6L_{FWHM}$ . Сплошная линия — результат расчета с «квантовомеханическим» источником (7), штриховая — расчет с «гидродинамическим» источником (13), штрих-пунктирная — гидродинамический расчет, но без ионизационного тока (второй член в (13) равен 0), пунктирная — начальный спектр лазерного импульса до входа в газ. Лазерный импульс имел интенсивность  $I_{max} = 10^{16}$  Вт/см<sup>2</sup>, гауссову огибающую с шириной на половине высоты  $\tau_{FWHM} = L_{FWHM}/c = 13$  фс, длину волны  $\lambda_0 = 0.8$  мкм; концентрация газа  $n_{at}/n_c = 10^{-2}$ , потенциал ионизации единственного уровня энергии  $U_1 = 24.6$  эВ

ионизации ( $\gamma \approx 0.2$  в области максимальной скорости ионизации) уравнения (12), (14), (11) хорошо описывают динамику изменения со временем среднего заряда ионов. В то же время на кривой зависимости скорости ионизации от связанной с импульсом координаты  $(x-ct)/\lambda_0$ , полученной из уравнения Шредингера (15), имеются дополнительные, по сравнению с расчетами по формулам (12), (14), пики. Их происхождение связано с процессами захвата образовавшихся при ионизации газа электронов на родительских ионах, проявляющихся в отрицательных значениях скорости ионизации  $S$  (см. рис. 1а),

и, кроме того, с неадиабатическим откликом атомного диполя на быстроменяющееся электрическое поле [33].

Из сравнения спектров гармоник (см. рис. 1б), полученных при помощи уравнений (4), (7), (15), с результатами гидродинамических расчетов по формулам (4), (11)–(14) как с учетом, так и без учета ионизационного тока (в последнем случае второй член в (13) полагался равным 0) следует, что источник (13) с ионизационным током хорошо описывает амплитуду третьей и пятой гармоник и удовлетворительно — амплитуду седьмой гармоники. При

этом правильно описывается не только величина, но и форма спектра третьей гармоники. Более высокие гармоники, вычисленные по гидродинамической модели, имеют существенно заниженное значение по сравнению с квантовомеханическими результатами. Это связано с тем, что основным механизмом их генерации являются не учитываемые в рамках гидродинамической модели процессы захвата электронов на родительских ионах [10, 16], проявляющиеся в упомянутых выше «дополнительных» пиках на кривой  $S(\xi)$ .

Далее  $\sigma_y$  и  $u$  меняем так, чтобы в потенциальной яме добавлялись дополнительные уровни, а энергия основного состояния оставалась бы при этом неизменной,  $U_1 = 24.6$  эВ. При  $\sigma_y = 1.5$  и  $u = 0.685$  появляется дополнительный уровень с энергией  $U_2 = 4.85$  эВ; при  $\sigma_y = 2.4$  и  $u = 0.602$  — два дополнительных уровня с энергиями  $U_2 = 10.4$  эВ и  $U_3 = 1.5$  эВ; при  $\sigma_y = 3.4$  и  $u = 0.553$  — три дополнительных уровня с энергиями  $U_2 = 14.54$  эВ,  $U_3 = 6.63$  эВ и  $U_4 = 1.35$  эВ. Спектры, соответствующие таким значениям  $\sigma_y$  и  $u$ , приведены на рис. 2. Константа  $C_1$  в формуле (14), рассчитанная при помощи (17), равна  $C_1 \approx 4, 8, 24, 130$  соответственно, для случаев  $a, b, c, d$ . Из рис. 2 следует, что увеличение количества связанных состояний в потенциальной яме приводит к значительному увеличению амплитуд пятой, седьмой и более высоких гармоник. При этом амплитуда третьей гармоники слабо зависит от количества связанных состояний в потенциальной яме и хорошо описывается гидродинамической моделью (с ионизационным током). Амплитуда пятой гармоники также хорошо описывается гидродинамической моделью в случае, когда отсутствуют возбужденные уровни энергии и переходы между ними (рис. 1, 2а). Однако при наличии возбужденных уровней энергии и переходов между ними величины пятой, седьмой и девятой гармоник, рассчитанных квантовомеханически, оказываются значительно большими, чем это следует из гидродинамической модели. Отметим, что вывод о важности переходов между возбужденными уровнями энергии для генерации таких гармоник находится в согласии с результатами работы [18].

#### 4. О СВЯЗИ АМПЛИТУДЫ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ С ОСТАТОЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Из результатов предыдущего раздела (см. рис. 1, 2) следует, что амплитуда третьей гармоники основ-

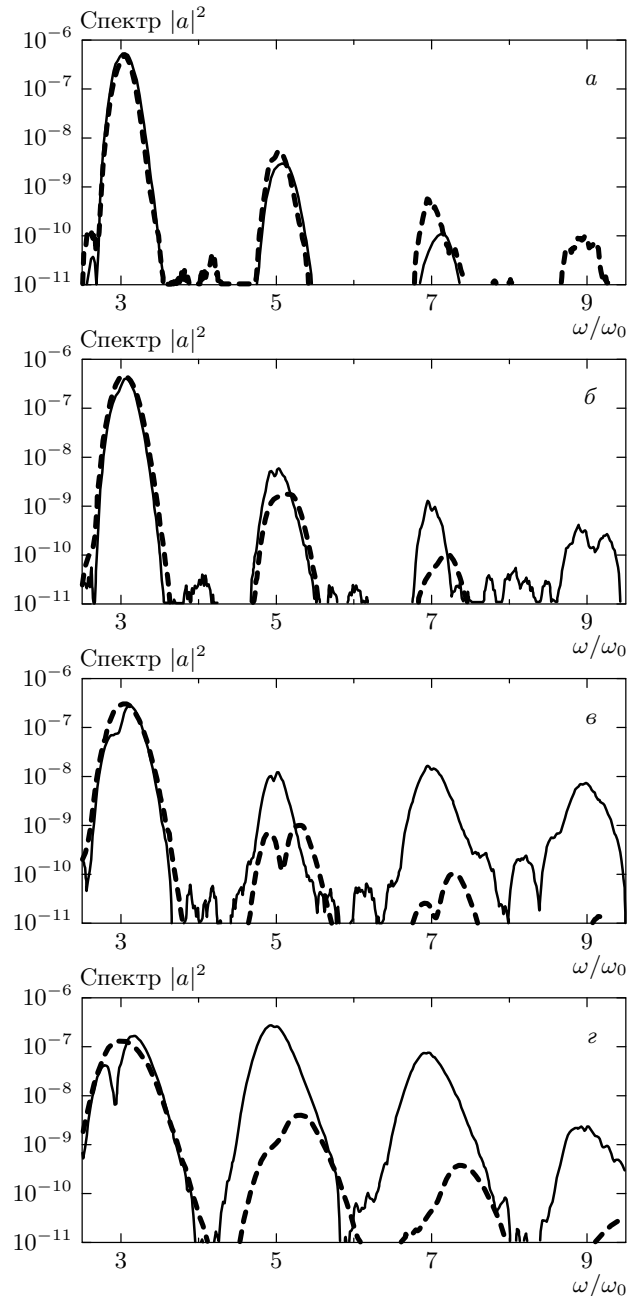


Рис. 2. Спектры третьей, пятой, седьмой и девятой гармоник для атомных потенциалов с различным числом уровней энергии;  $U_1 = 24.6$  эВ. а — с единственным уровнем энергии  $U_1 = 24.6$  эВ; б — с дополнительным уровнем энергии  $U_2 = 4.85$  эВ; в — с двумя дополнительными уровнями энергии  $U_2 = 10.4$  эВ,  $U_3 = 1.5$  эВ; г — с тремя дополнительными уровнями энергии  $U_2 = 14.54$  эВ,  $U_3 = 6.63$  эВ,  $U_4 = 1.35$  эВ. Сплошные линии — квантовомеханические расчеты, штриховые — гидродинамические расчеты. Приведены спектры после прохождения слоя газа  $x = 2.2L_{FWHM}$ ;  $\tau_{FWHM} = 25$  фс, остальные параметры такие же, как и на рис. 1

ной частоты  $\omega_0$  хорошо описывается гидродинамической моделью. Следовательно, величина третьей гармоники целиком определяется напряженностью лазерного поля в момент максимальной скорости ионизации. Но этой же величиной определяется и остаточная энергия электронов [6]. Это позволяет выразить величину остаточной энергии через величину амплитуды третьей гармоники, что может быть использовано для диагностики остаточной энергии по спектру третьей гармоники.

С этой целью, проведя фурье-преобразование по переменной  $\xi$  уравнений (12) и (4) с источником (13), получим следующее уравнение для фурье-образа  $\hat{a}(k)$  высокочастотного поля, записанного в пренебрежении второй производной по  $\eta$  в уравнении (4):

$$2 \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{a}(k) = N \frac{1}{2\pi} \sum_{z=1}^{z_n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}(k-k') \times \left[ \frac{\hat{S}^{(z)}(k')}{kk'} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{U_z}{U_H} \hat{\Theta}^{(z)}(k') \right] dk', \quad k \neq 0, \quad (19)$$

где  $\hat{S}^{(z)}(k)$  — фурье-образ безразмерной скорости ионизации

$$S^{(z)} \equiv S^{(z)} / [n_{at}\omega_0],$$

$\hat{\Theta}^{(z)}$  — фурье-образ величины  $S^{(z)} / |a|^2$ .

Для дальнейших преобразований уравнения (19) будем предполагать, что безразмерное расстояние  $\eta = k_0 x$ , пройденное лазерным импульсом в газе, удовлетворяет неравенству  $\eta \ll 6(n_{at}/n_c)^{-1}$ , что позволяет пренебречь эффектами насыщения третьей гармоники, связанными с разностью групповых скоростей первой и третьей гармоники, а также с истощением лазерного импульса при ионизации. В этом случае и с учетом малости интенсивности высших гармоник по сравнению с основной из (19) следует линейная зависимость амплитуды третьей гармоники  $\hat{a}(3)$  от  $\eta$ :

$$\hat{a}(3) = \frac{N\eta}{6} \frac{1}{2\pi} \sum_{z=1}^{z_n} \int_{2-\Delta_1}^{2+\Delta_1} \hat{a}(3-k') \times \left[ \frac{\hat{S}^{(z)}(k')}{k'} - \frac{3\alpha^2}{2} \frac{U_z}{U_H} \hat{\Theta}^{(z)}(k') \right] dk', \quad (20)$$

где  $\Delta_1$  — характерная ширина спектра первой гармоники, определяющаяся длительностью лазерного импульса. Заметим, что член, пропорциональный  $\alpha^2$ , возник из-за учета ионизационного тока  $J_{ion}$ .

Формула (20) позволяет выразить величину третьей гармоники лазерного поля через спектр скорости ионизации. Через эту же величину, как будет показано ниже, можно выразить и остаточную энергию электронов  $Q_\infty$ . В рамках гидродинамической модели последнюю можно представить как  $Q_\infty = Q_{fin}(\xi \rightarrow -\infty)$ , где  $Q_{fin}(\xi)$  — часть полной энергии, определяющая долю энергии, необратимо перешедшую от лазерного поля к рождающимся при ионизации газа электронам [6]. В случае, когда ионизация происходит в туннельном режиме ( $\gamma \ll 1$ ) и при нерелятивистских интенсивностях,  $Q_{fin}(\xi)$ , в соответствии с [6, 7], можно представить в виде

$$Q_{fin}(\xi) = \frac{\sum_{z=1}^{z_n} \varkappa^{(z)}(\xi) Q_{fin}^{(z)}(\xi)}{\sum_{z=1}^{z_n} \varkappa^{(z)}(\xi)}, \quad (21)$$

$$Q_{fin}^{(z)}(\xi) = \frac{1}{\varkappa^{(z)}(\xi)} \int_{\infty}^{\xi} S^{(z)}(\xi^*) Q_e(\xi, \xi^*) d\xi^*,$$

где  $Q_{fin}^{(z)}$  — составляющая энергии группы электронов, приведенная к безразмерному виду с помощью коэффициента  $mc^2$  [7], родившихся при  $z$ -кратной ионизации,  $\varkappa^{(z)} = n_z/n_{at}$  — степень  $z$ -кратной ионизации,

$$Q_e(\xi, \xi^*) = \frac{1}{2} \left[ \int_{\xi^*}^{\xi} a(\xi') d\xi' \right]^2$$

— безразмерная энергия, получаемая к моменту  $\xi$  электроном, родившимся в момент  $\xi^*$ . Отметим, что, как и в случае определения амплитуды третьей гармоники, гидродинамический расчет доли энергии  $Q_{fin}(\xi)$  находится в хорошем согласии с квантовомеханическим расчетом полной энергии электрона по формуле

$$Q(\xi) = \left\langle \Psi(\xi, y_a) \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y_a^2} \right| \Psi(\xi, y_a) \right\rangle$$

(см. рис. 3). На рис. 3 видно, что везде, за исключением начального этапа, когда происходит ионизация, кривая  $Q_{fin}(\xi)$  является огибающей снизу для кривой  $Q(\xi)$ .

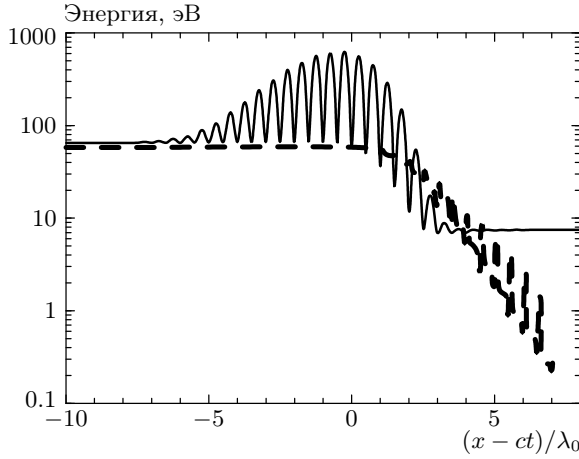
С целью установить связь  $Q_\infty$  с  $\hat{a}(3)$  перепишем выражение (21) для

$$Q_\infty^{(z)} = Q_{fin}^{(z)}(\xi \rightarrow -\infty)$$

в виде

$$Q_\infty^{(z)} = \left( 2\pi \varkappa^{(z)} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Q}_e(-k') \hat{S}^{(z)}(k') dk', \quad (22)$$





**Рис. 3.** Квантовомеханический расчет энергии электрона (сплошная линия) и гидродинамический расчет части энергии, перешедшей от поля к электрону (штриховая линия) для параметров, указанных на рис. 1

где  $\widehat{Q}_e(k)$  — фурье-образ энергии  $Q_e(-\infty, \xi^*)$ ,  $\varkappa_\infty^{(z)} = \varkappa^{(z)}(\xi \rightarrow -\infty)$ . Для аналитического определения связи  $Q_\infty$  и  $\widehat{a}(3)$  выражения (22) и (20) необходимо упростить, для чего рассмотрим приближение заданного лазерного импульса:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= a_L(\xi) \cos \xi, \\ Q_e(\xi, \xi^*) &\approx \frac{1}{2} a_L^2(\xi^*) \sin^2 \xi^* + \frac{1}{2} a_L^2(\xi) \sin^2 \xi - \\ &- a_L(\xi^*) a_L(\xi) \sin \xi^* \sin \xi, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $a_L(\xi)$  — огибающая. Для  $a(\xi)$  и  $Q_e(\xi)$  в форме (23) в предположении выполнения неравенств

$$k_0 L_{FWHM} \gg k_0 L_{S^{(z)}} \gg 1,$$

(где  $L_{S^{(z)}}$  — характерная ширина ионизационного фронта при образовании  $z$ -кратно ионизованных ионов,  $L_{FWHM}$  — полная ширина лазерного импульса на половине его максимальной интенсивности), можно в каждом из слагаемых суммы по  $z$  в уравнениях (20) и (22) подставить в качестве фурье-образов  $\widehat{a}(k)$  и  $\widehat{Q}_e(k)$  следующие аппроксимации:

$$\widehat{a}(k) = a_L(\xi_z) 2\pi \left[ \frac{\delta(k-1)}{2} + \frac{\delta(k+1)}{2} \right],$$

$$\widehat{Q}_e(k) = (1/4) a_L^2(\xi_z) 2\pi \left[ \delta(k) - \frac{\delta(k-2)}{2} - \frac{\delta(k+2)}{2} \right],$$

где  $\xi_z$  — момент максимума  $z$ -го ионизационного

фронта. В результате из (20) и (22) получаем следующие алгебраические уравнения для  $\widehat{a}(3)$  и  $Q_\infty$ :

$$\begin{aligned} Q_\infty &= \frac{\sum_{z=1}^{z_n} \varkappa_\infty^{(z)} Q_\infty^{(z)}}{\sum_{z=1}^{z_n} \varkappa_\infty^{(z)}}, \\ Q_\infty^{(z)} &\approx \frac{1}{4} a_L^2(\xi_z) \left[ 1 - \mu_2^{(z)} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \widehat{a}(3) &\approx \frac{N\eta}{24} \sum_{z=1}^{z_n} a_L(\xi_z) \varkappa_\infty^{(z)} \times \\ &\times \left[ \mu_2^{(z)} + \frac{\mu_4^{(z)}}{2} - \frac{6\alpha^2}{a_L^2(\xi_z)} \frac{U_z}{U_H} (2\mu_2^{(z)} - 1) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\mu_{2l}^{(z)} \equiv \frac{\widehat{S}^{(z)}(2l)}{\widehat{S}^{(z)}(0)}, \quad l = 1, 2,$$

$a_L(\xi_z)$  — величина огибающей при  $\xi = \xi_z$ . При выводе (25) было использовано равенство

$$a_L^2(\xi_z) \left[ \widehat{\mathcal{G}}^{(z)}(2) + \widehat{\mathcal{G}}^{(z)}(4) \right] = 2 \left[ 2\widehat{S}^{(z)}(2) - \widehat{S}^{(z)}(0) \right],$$

справедливое в приближении медленно меняющихся амплитуд. Кроме того, было учтено, что

$$\widehat{S}^{(z)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S^{(z)}(\xi) d\xi = \varkappa_\infty^{(z)}.$$

Чтобы вычислить  $\mu_{2l}^{(z)}$  для реальных многоэлектронных атомов, используем формулу для частот ионизации  $W_z$  из работы [29], согласно которой константы в формуле (14) равны

$$\beta_z = 2n_{*,z} - 1, \quad C_z = \left( \frac{4e^1 z^3}{n_{*,z}^4} \right)^{\beta_z} \frac{e^1 z^2}{2\pi n_{*,z}^4},$$

$$e^1 \equiv \exp(1)$$

( $n_{*,z} = z\sqrt{U_H/U_z}$  — главное квантовое число). Рассматривая далее приближение медленно меняющихся амплитуд и учитывая, что максимальный вклад в гармоники скорости ионизации дает окрестность точки ее максимума  $\xi_z$ , получаем следующее выражение для  $\mu_{2l}^{(z)}$ :

$$\begin{aligned} \mu_{2l}^{(z)} &= \frac{\mathfrak{J}_{2l}^{(z)}}{\mathfrak{J}_0^{(z)}}, \quad \mathfrak{J}_{2l}^{(z)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2l\xi)}{[\cos^2(\xi)]^{n_{*,z}-1/2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2}{\varepsilon_z [\cos^2(\xi)]^{1/2}} \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(a_L(\xi_z)) = 3 \frac{a_L(\xi_z)}{a_{a.u.}} \left( \frac{n_{*,z}}{z} \right)^3$$

— малая в области ионизации ( $\varepsilon_z \lesssim 1/3$ ) величина.

Используя малость  $\varepsilon_z$ , можно получить из (26) следующее асимптотическое разложение для  $\mu_2^{(z)}$ , записанное ниже с точностью до членов порядка  $\varepsilon_z^4$ :

$$\begin{aligned} \mu_2^{(z)} = & 1 - \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 \left( -n_{*,z} + \frac{9}{4} \right) + \\ & + \varepsilon_z^3 \left( -n_{*,z}^2 + \frac{21}{4} n_{*,z} - \frac{207}{32} \right) + \\ & + \varepsilon_z^4 \left( -n_{*,z}^3 + 9n_{*,z}^2 - \frac{201}{8} n_{*,z} + \frac{1419}{64} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогичный асимптотический ряд можно написать и для  $\mu_4^{(z)}$ , однако он обладает худшей сходимостью, чем ряд (27). В то же время общее выражение (26) неудобно для вычислений. Поэтому целесообразно использовать следующее приближенное выражение для  $\mu_4^{(z)}$ , основанное на данных численных расчетов:

$$\mu_4^{(z)} \approx 0.4 \mu_2^{(z)}. \quad (28)$$

Согласно (25) и (28), в туннельном режиме  $\mu_4^{(z)}$  вносит небольшую добавку при вычислении  $\hat{a}(3)$  по сравнению с  $\mu_2^{(z)}$ , поэтому возможная неточность в определении  $\mu_4^{(z)}$  по формуле (28) несущественна.

Уравнения (24)–(28) позволяют, вообще говоря, выразить  $Q_\infty$  через  $\hat{a}(3)$  только в случае однократной ионизации газа. В случае, когда происходит многократная ионизация, для определения остаточной энергии недостаточно информации об амплитуде третьей гармоники, необходимо также знать и информацию о ее спектре, для чего требуется рассмотрение исходной системы интегральных уравнений (21), (20). Однако в этом случае система (24)–(28) позволяет, в принципе, определить величину остаточной энергии  $Q_\infty^{(z_{max})}$  группы электронов, рождающихся при образовании ионов максимальной кратности ионизации. Для этого необходимо, чтобы ионизационные пики, соответствующие ионизации различных электронных уровней, были достаточно четко разделены (как в случае гелия). Точнее говоря, необходимо выполнение неравенства

$$a_L(\xi_{z_{max}}) \gg a_L(\xi_{z_{max}-1}).$$

Подставив для оценки вместо  $a_L(\xi_{z_{max}})$  величину порогового для  $z_{max}$ -кратной ионизации поля [34]

$$\frac{a_{z_{max}}}{a_{a.u.}} = \frac{(U_{z_{max}}/U_H)^2}{16z_{max}},$$

удобно переписать это неравенство в виде

$$\left( \frac{U_{z_{max}}}{U_{z_{max}-1}} \right)^2 \frac{z_{max} - 1}{z_{max}} \gg 1. \quad (29)$$

В условиях, когда неравенство (29) выполняется, можно опустить в (25) все члены, кроме пропорциональных  $a_L(\xi_{z_{max}})$ , дающих наибольший вклад. Учитывая также численный результат (28), получаем

$$\begin{aligned} \hat{a}(3) \approx & \frac{N\eta}{24} a_L(\xi_{z_{max}}) \kappa_\infty^{(z_{max})} \times \\ & \times \left[ 1.2 \mu_2^{(z_{max})} - \frac{6\alpha^2}{a_L^2(\xi_{z_{max}})} \frac{U_z}{U_H} (2\mu_2^{(z_{max})} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя в уравнение (30) выражение (27) для  $\mu_2^{(z_{max})}$ , получаем, что величина  $a_L(\xi_{z_{max}})$  может быть выражена<sup>1)</sup> через отношение  $\hat{a}(3)/N\eta\kappa_\infty^{(z_{max})}$ . Это достигается путем вычисления величины

$$\varepsilon = 3 \frac{a_L(\xi_{z_{max}})}{a_{a.u.}} \left( \frac{n_{*,z_{max}}}{z_{max}} \right)^3,$$

являющейся корнем следующего из (30), (27) уравнения

$$\begin{aligned} B + \varepsilon[A - 2B] - \varepsilon^2[C_\mu - 2BC_2] + \varepsilon^3[C_\mu - 2BC_3] - \\ - \varepsilon^4[C_\mu C_2 - 2BC_4] + \varepsilon^5[C_\mu C_3 - 2BC_5] + \dots + \\ + (-1)^{n+1} \varepsilon^n [C_\mu C_{n-2} - 2BC_n] = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A = & \frac{72}{N\eta\kappa_\infty^{(z_{max})}} \frac{\hat{a}(3)}{a_{a.u.}} \left( \frac{U_{z_{max}}}{U_H} \right)^{-3/2}, \\ B = & 54 \left( \frac{\alpha}{a_{a.u.}} \right)^2 \left( \frac{U_{z_{max}}}{U_H} \right)^{-2}, \quad C_\mu \approx 1.2, \\ C_2 \approx & \frac{9}{4} - n_{*,z}, \quad C_3 \approx \frac{207}{32} - \frac{21}{4} n_{*,z} + n_{*,z}^2, \\ C_4 \approx & \frac{1419}{64} - \frac{201}{8} n_{*,z} + 9n_{*,z}^2 - n_{*,z}^3, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $C_n, n = 2, 3, \dots$  — коэффициенты в асимптотическом разложении

$$\mu_2^{(z_{max})} = 1 - \varepsilon_{z_{max}} + C_2 \varepsilon_{z_{max}}^2 - C_3 \varepsilon_{z_{max}}^3 + \dots,$$

<sup>1)</sup> Величина  $\eta$  должна быть не слишком велика, чтобы не сказывались эффекты насыщения третьей гармоники.

Сравнение расчетов остаточной энергии, выраженной через  $\hat{a}(3)$ , по формулам (31)– (34), (24), (27) с расчетами по формуле (21)

Параметры задачи						Данные гидро- динамических расчетов $\hat{a}(3)$		$Q_{\infty}^{(z_{max})}$ по фор- мулам (31)–(34), (24), (27)	$Q_{\infty}^{(z_{max})}$ по фор- муле (21)
$z_{max}$	$U_{z_{max}}$ , эВ	$I_{max}$ , Вт/см <sup>2</sup>	$\lambda_0$ , мкм	$\tau_{FWHM}$ , фс	$\frac{n_{at}}{n_c}$	$\hat{a}(3)$	$\frac{\eta/c}{\tau_{FWHM}}$		
1	13.6	$10^{15}$	0.8	13	$10^{-2}$	$1.86 \cdot 10^{-4}$	3	8.2	6.6
1	13.6	$10^{15}$	1.08	50	$10^{-2}$	$2.22 \cdot 10^{-4}$	2	6.7	7.0
1	24.6	$5 \cdot 10^{15}$	0.8	13	$10^{-2}$	$8.8 \cdot 10^{-4}$	3.0	40	42
1	24.6	$5 \cdot 10^{15}$	0.8	50	$10^{-2}$	$10.7 \cdot 10^{-4}$	1.3	25	27
2	54.4	$4 \cdot 10^{16}$	0.8	13	$5 \cdot 10^{-3}$	$13.1 \cdot 10^{-4}$	2.1	215	205
2	54.4	$4 \cdot 10^{16}$	0.8	50	$5 \cdot 10^{-3}$	$14.75 \cdot 10^{-4}$	0.66	172	127
5	97.9	$4 \cdot 10^{17}$	0.8	20	$2 \cdot 10^{-3}$	$13.66 \cdot 10^{-4}$	1.5	484	305

см. (27). Учитывая малость величины  $\varepsilon$ , легко записать решение (31) в виде степенного ряда:

$$\varepsilon = \varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \dots,$$

$$\varepsilon_{(0)} = \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4BD_2}}{2D_2},$$

$$\varepsilon_{(1)} = \frac{\varepsilon_{(0)}^3 D_3}{2\varepsilon_{(0)} D_2 - D_1} \sim \varepsilon_{(0)}^2,$$

$$\varepsilon_{(2)} = \frac{3\varepsilon_{(0)}^2 \varepsilon_{(1)} D_3 - \varepsilon_{(1)}^2 D_2 - \varepsilon_{(0)}^4 D_4}{2\varepsilon_{(0)} D_2 - D_1} \sim \varepsilon_{(0)}^3 \dots,$$

где  $D_n$  — коэффициент при  $\varepsilon^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  в уравнении (31).

Определив корень  $\varepsilon$  и величину

$$a_L(\xi_{z_{max}}) = \frac{\varepsilon a_{a.u.}}{3} \left( \frac{z_{max}}{n_{*,z_{max}}} \right)^3, \quad (34)$$

из формул (24), (27) легко найти значение  $Q_{\infty}^{(z_{max})}$ , зависимость которого от амплитуды третьей гармоники будет определяться зависимостью найденного значения  $\varepsilon$  от коэффициента  $A$  (32). Уравнения (31)– (34), (24), (27) показывают принципиальную возможность определения остаточной энергии в экспериментах с помощью оптических измерений

третьей гармоники лазерного излучения, создающего плазму<sup>2)</sup>.

Результаты сравнения расчетов  $Q_{\infty}^{(z_{max})}$  по формулам (31)–(34), (24), (27) с расчетами по формуле (21) показаны в таблице для случая, когда в асимптотическом ряду (27) учтены члены вплоть до  $\varepsilon_{z_{max}}^3$ , а при нахождении корня полинома (31) учтены члены вплоть до  $\varepsilon_{(2)}$ . Приведенные расчеты показывают, что предложенная диагностика остаточной энергии электронов, ионизовавшихся с внутренних уровней энергии, по амплитуде третьей гармоники удовлетворительно (с точностью не хуже 50%) согласуется с расчетами остаточной энергии данной группы электронов по формуле (21). Отметим, что наилучшее согласие указанных расчетов наблюдается в том случае, когда происходит однократная ионизация гелия, поскольку при этом, с одной стороны, в формулах (24) и (25) есть всего одно слагаемое с  $z = 1$ , а с другой стороны, условие туннельной ионизации  $\gamma \ll 1$  выполняется с достаточным запасом (в расчетах  $\gamma \lesssim 0.3$ ). Точность расчетов для водорода меньше, так как выбранные параметры при этом оказываются на границе режима туннельной ионизации ( $\gamma \sim 0.5$ ). Для двукратно ионизованного гелия предлагаемый подход также позволяет удовлетвори-

2) Степень ионизации  $\kappa_{\infty}^{(z_{max})}$  должна оцениваться из независимых соображений. Ниже предполагается, что  $\kappa_{\infty}^{(z_{max})} = 1$ .

тельно описать величину  $Q_{\infty}^{(z_{max})}$ , так как ионизационные пики, соответствующие последовательной ионизации первого и второго электронов, достаточно хорошо разделены<sup>3)</sup>, что видно также из того, что левая часть неравенства (29) в этом случае приблизительно равна 2.5. Для азота точность предлагаемого подхода несколько хуже, так как соответствующие ионизационные пики в азоте меньше разделены (величина левой части неравенства (29) при этом приблизительно равна 1.3).

## 5. ВЫВОДЫ

Таким образом, показано, что спектр излучения, возникающего при ионизации газа фемтосекундным интенсивным лазерным импульсом, оказывается сильно зависящим от структуры атомных уровней в области гармоник с частотой  $\omega \geq 5\omega_0$ . Интенсивность этих гармоник оказывается тем выше, чем больше число уровней связанных состояний в поле атомного потенциала. Максимум спектральной плотности и форма линии, соответствующей третьей гармонике лазерного излучения, оказываются практически не зависящими от внутриатомной структуры уровней и определяются величиной потенциала ионизации и параметрами лазерного импульса. Это обстоятельство позволяет построить для описания генерации третьей гармоники в процессе ионизации простую гидродинамическую модель с использованием квантовых вероятностей ионизации в поле лазерного импульса. В рамках этой модели по максимуму спектра третьей гармоники может быть определена величина остаточной энергии электронов, рождающихся в результате ионизации. Это означает, что спектр третьей гармоники может быть использован для построения оптической диагностики вещества в ходе его ионизации.

Настоящая работа частично поддержана РФФИ (грант № 01-02-16723) и NATO PST CLG 979372.

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. Brunel, *J. Opt. Soc. Amer. B* **7**, 521 (1990).
2. Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, М. Г. Кейджян, М. В. Чеготов, *Физика плазмы* **26**, 1010 (2000).
3. Разделение этих пиков в расчетах, отображенных в пятой строке таблицы, более четкое, чем в шестой строке, чем и объясняется большая точность расчетов в пятой строке
3. В. П. Кандидов, О. Г. Косарева, С. А. Шленов, *КЭ* **28**, 971 (1994).
4. M. Geissler, G. Tempea, A. Scrinzi et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2930 (1999).
5. V. B. Gildenburg, A. V. Kim, V. A. Krupnov et al., *IEEE Trans. Plasma Sci.* **21**, 34 (1993).
6. Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, С. П. Гореславский, М. В. Чеготов, *Физика плазмы* **27**, 296 (2001); N. E. Andreev, M. V. Chegotov, M. E. Veisman et al., *SPIE Proc.* **3735**, 234 (1998).
7. Н. Е. Андреев, М. В. Чеготов, М. Е. Вейсман и др., *Письма в ЖЭТФ* **68**, 566 (1998).
8. P. Pulsifer, J. P. Apruzese, J. Davis, and P. Kepple, *Phys. Rev. A* **49**, 3958 (1994).
9. A. L'Huillier A, L-A. Lompre, G. Mainfray, and C. Manus, in *Atoms in Intense Laser Fields*, ed. by M. Gavrilu, Academ. Press, Inc. (1992), p. 139.
10. В. Т. Платоненко, В. В. Стрелков, *КЭ* **25**, 582 (1998).
11. A. M. Sergeev, A. V. Kim, E. V. Vanin et al., *Proc. SPIE* **2770**, 36 (1995).
12. P. Antoine, A. L'Huillier, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1234 (1996).
13. В. П. Силин, *КЭ* **26**, 11 (1998).
14. К. Н. Овчинников, В. П. Силин, *Кратк. сообщ. по физике ФИАН*, вып. 10, с. 19 (1998).
15. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **117**, 920 (2000).
16. M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov et al., *Phys. Rev. A* **49**, 2117 (1994).
17. P. B. Corcum, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1994 (1993).
18. C. F. de M. Faria, M. Dorr, and W. Sander, *Phys. Rev. A* **58**, 2990 (1998).
19. N. Aközbeke, A. Iwasaki, A. Becker et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 143901 (2002).
20. J. L. Krause, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, *Phys. Rev. A* **45**, 4998 (1992).
21. L. Roso-Franko, A. Sanpera, M. L. Pons, and L. Plaja, *Phys. Rev. A* **44**, 4652 (1991).
22. A. M. Ermolaev and A. V. Selin, *Phys. Rev. A* **62**, 015401 (2000).
23. S. Blanes and P. C. Moan, *Phys. Lett. A* **265**, 35 (2000).

24. Дж. Х. Эбберли, К. Су, Дж. Джаванайнен, Изв. АН, сер. физ. **53**, 1101 (1989).
25. Е. В. Ванин, М. С. Даунер, А. В. Ким, А. М. Сергеев, Письма в ЖЭТФ **58**, 964 (1993).
26. W. Becker, S. Long, and J. K. McIver, Phys. Rev. A **50**, 1540 (1994).
27. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
28. М. В. Чеготов, Физика плазмы **26**, 940 (2000).
29. М. В. Аммосов, Н. В. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **91**, 2008 (1986).
30. P. Mulser, F. Cornolti, and D. Bauer, Phys. Plasmas **5**, 4466 (1998).
31. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
32. Н. Е. Андреев, М. В. Чеготов, в сб. *Тезисы докладов XXVII звенигородской конференции по физике плазмы и УТС*, Звенигород (2000).
33. I. P. Christov, J. Zhou, J. Peatross et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 1743 (1996).
34. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, Труды ИОФАН **50**, 34 (1995).