
**УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ
В ПЛАЗМЕ**

УДК 533.95

**ДИНАМИКА УСКОРЕНИЯ СГУСТКА ЭЛЕКТРОНОВ
В КИЛЬВАТЕРНОЙ ВОЛНЕ**

© 2001 г. С. В. Кузнецов, Н. Е. Андреев

Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенного института высоких температур РАН

Поступила в редакцию 06.07.2000 г.

Окончательный вариант получен 04.10.2000 г.

Энергетические характеристики ускоряемого в кильватерной волне электронного сгустка в большой степени определяются его начальными пространственными размерами. Современные инжекторы не могут обеспечить требуемые исходные пространственные параметры сгустка для осуществления его дальнейшего ускорения без увеличения разброса по энергии между составляющими пучок электронами. Для решения этой проблемы рассматривается возможность улучшения энергетических характеристик ускоряемого сгустка за счет его предварительного продольного сжатия в процессе захвата электронов пучка кильватерной волной. Выведены аналитические формулы, описывающие в одномерной постановке динамику изменения пространственных и энергетических характеристик короткого (много меньшего длины кильватерной волны) сгустка на стадии захвата и в процессе ускорения. Показано, что аналитические расчеты с хорошей точностью совпадают с результатами численного моделирования как в одномерном случае, так и для трехмерных сгустков, если первоначально электроны инжектировались в оптимальную зону инжекции. Обсуждается возможность оптимизации процесса формирования сжатых пучков с целью получения таких параметров сгустков, которые обеспечат наиболее качественное последующее их ускорение до больших энергий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое исследование основных принципов процесса ускорения электронов в кильватерной волне пространственного заряда приобрело большое значение и существенно активизировалось после проведения успешных экспериментов по генерации сверхсильных ускоряющих полей (~100 ГэВ/м), создаваемых в плазме мощными короткими лазерными импульсами [1–5]. В настоящее время на передний план исследований в большой степени уже выдвигается задача обеспечения качественного ускорения электронных сгустков. Среди обычных требований, предъявляемых к качеству ускоренного сгустка, является малость относительного разброса по энергии электронов в пучке (см., например, [6]). Для многих приложений (см. [7] и цитируемую там литературу) очень важной характеристикой ускоренных электронов является малость продольной длины сгустка. Ранее проведенные исследования по ускорению сгустков электронов [8] показали, что степень моноэнергетичности ускоряемого пучка и его продольная длина сильно взаимосвязаны. Желательно, чтобы длина пучка в течение всего процесса ускорения была возможно меньшей, тогда не увеличивается и относительный разброс электронов по энергии по мере их ускорения. Однако современные инжекторы не могут изначально обеспечить требуемый размер пучков, поэтому возникает необходимость, прежде чем ускорять сгусток, подверг-

нуть его каким-либо образом дополнительному укорочению в направлении ускорения. В частности, для продольного сжатия пучка можно использовать механизм группировки электронов в процессе их захвата кильватерной волной, если энергия инжекции сгустка такова, что скорость составляющих его электронов значительно меньше фазовой скорости волны. Результат воздействия этого механизма группировки электронов на их распределение на фазовой плоскости координата–импульс неоднократно демонстрировался при исследованиях динамики движения совокупности частиц длинных пучков в процессе их захвата и ускорения потенциальной волной. Локальное сгущение или бунчировка электронов наблюдалась не только по физической координате [7, 9], но и в энергетическом пространстве [9–11]. Конкретно возможность использования такого механизма для дополнительного продольного сжатия изначально достаточно короткого инжектируемого сгустка электронов также была ранее продемонстрирована авторами посредством численного моделирования [12] и теоретически исследовалась в [13].

В настоящей работе более детально аналитически исследуются основные закономерности изменения как пространственных, так и энергетических характеристик одномерного короткого (в сравнении с длиной кильватерной волны) электронного пучка в процессе его захвата и ускорения при условии, что начальная скорость инжек-

тируемых электронов меньше фазовой скорости волны. В разд. 2 выводятся основные формулы и изучаются сжатие и изменение энергетических характеристик короткого (в сравнении с длиной волны) сгустка в процессе его захвата кильватерной волной. Данный этап в ускорении сгустков обычно называется бунчирующей стадией ускорительного процесса. В разд. 3 изучается динамика изменения энергетических характеристик сгустка при его инжекции в ускоряющую стадию, где движение электронов происходит со скоростью, превышающей фазовую скорость волны. Данное исследование полезно для мультистадийной схемы ускорения, когда для получения больших энергий сгусток неоднократно передается из одной ускорительной ступени в другую. Полученные аналитические формулы в различных пределах сопоставляются с результатами численного моделирования как для одномерной постановки задачи, так и с результатами моделирования захвата и ускорения пространственных осесимметричных пучков. В Заключении сформулированы основные результаты настоящей работы.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРОЦЕССА ГРУППИРОВКИ КИЛЬВАТЕРНОЙ ВОЛНОЙ КОРОТКОГО СГУСТКА ЭЛЕКТРОНОВ

Процесс продольного сжатия или бунчировки моноэнергетического сгустка электронов в направлении их ускорения, т.е. в направлении фазовой скорости волны V_{ph} (вдоль оси OZ), будем рассматривать в одномерной постановке. Такой подход можно использовать в случае инжектируемых пучков радиуса R_b , много меньшего в сравнении с характерным поперечным размером оптимальной зоны инжекции [14]. Если потенциал пространственной осесимметричной кильватерной волны имеет вид

$$\phi(\xi, r) = -\phi_0 \cos(\xi) \exp(-r^2/R_p^2), \quad (1)$$

где введены обозначения: $\xi = k_p(z - V_{ph}t)$, $k_p = \omega_p/c$ – волновое число, $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e}$ – ленгмюровская частота электронов плазмы, R_p – характерный размер поля в поперечном направлении, ϕ_0 – амплитуда потенциала, то максимальный радиус оптимальной зоны инжекции для пучка с энергией инжекции E_{inj} оценивается формулой [14]

$$R_{\max, \text{opt}} = R_p \left\{ \ln \left[\frac{|e|\phi_0}{E_{inj} - \beta \sqrt{E_{inj}^2 - m^2 c^4} - m c^2 / \gamma} \right] \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

При условии $R_b \ll R_{\max, \text{opt}}$ можно считать, что потенциал волны ϕ является одномерным и в лабораторной системе координат зависит только от сопутствующей переменной $\xi = k_p(z - V_{ph}t)$. Отме-

тим, что фазовая скорость волны близка к скорости света ($V_{ph} \approx c$), как это имеет место для кильватерного поля, возбуждаемого лазерным импульсом в разреженной плазме ($\omega_0 \gg \omega_p$, ω_0 – частота лазерного излучения).

Для бунчировки сгусток электронов необходимо инжектировать в кильватерную волну с такой энергией E_{inj} , чтобы скорость электронов была меньше фазовой скорости волны, т.е. $E_{inj} < m c^2 \gamma$,

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = V_{ph}/c$. Физический механизм сжатия пучка обусловлен продольной неоднородностью силы $F_z = |e|\partial\phi/\partial z$, когда на ускоряемые электроны в передней части сгустка действует сила, меньшая, чем на задние. Следовательно, наиболее сильно эффект бунчировки будет проявляться для электронов, проходящих область наибольшего отрицательного градиента силы, где $\partial^2\phi/\partial z^2 < 0$. Обычно такая область находится в окрестности максимума потенциала $\phi(\xi)$ плазменной волны. С другой стороны, желательно, чтобы в этой области энергия пучка была возможно меньше, так как в этом случае релятивистская масса электронов будет также меньше и влияние продольной неоднородности силы $F_z = |e|\partial\phi/\partial z$ более существенно скажется на траекториях электронов, т.е. на сжатии пучка. Поэтому наиболее эффективно сжатие сгустка при данной энергии инжекции должно реализовываться при инжекции пучка сразу в окрестность максимума потенциала, данный случай и будет рассматриваться в настоящем исследовании.

Уравнение движения отдельного электрона в системе координат, связанной с волной, имеет вид

$$\frac{dp'}{dt'} = |e| \frac{d\phi'}{dz'}, \quad (3)$$

где p' – продольный импульс электрона, z' – координата вдоль направления волны, $\phi'(k'_p z')$ – потенциал волны, не зависящий в этой системе отсчета от времени, k'_p – волновое число в данной системе отсчета. По условию инжекции изначально все электроны сгустка движутся в отрицательном направлении оси OZ' и изменяют направление своего движения только после прохождения точки поворота своих траекторий.

Уравнение (3) имеет интеграл сохранения энергии электрона в потенциальной волне

$$E' - |e|\phi'(k'_p z') = E'_{inj} - |e|\phi'(k'_p z'_{inj}), \quad (4)$$

а траектория электрона определяется в квадратурах и до точки поворота имеет вид

$$t' - t'_{inj} = -\frac{1}{c} \int_{z'_{inj}}^{z'} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{[E'_{inj} + |e|(\phi'(k'_p \eta) - \phi'(k'_p z'_{inj}))]^2}}}, \quad (5)$$

где z' , E' – текущие координата и энергия электрона в данный момент времени t' .

Используя релятивистское преобразование координат и времени, можно перейти в лабораторную систему отсчёта. В частности, для интер-

вала времени $\Delta t' = t' - t'_{inj}$ в системе координат, связанной с волной, имеет место соотношение

$$c\Delta t' = \gamma\{c\Delta t - \beta(z - z_{inj})\}. \quad (6)$$

Для пространственной координаты выполняется соотношение $z' = \gamma\{z - V_{ph}t\}$ и поэтому в дальнейшем в лабораторной системе координат целесообразно ввести автомодельную переменную $\xi = k_p(z - V_{ph}t)$.

Используя эти соотношения, после релятивистского преобразования энергии электрона и потенциала вместо (4), (5) получаем

$$E - \beta\sqrt{E^2 - m^2 c^4} - |e|\phi(\xi) = E_{inj} - \beta\sqrt{E_{inj}^2 - m^2 c^4} - |e|\phi(\xi_{inj}), \quad (7)$$

$$\gamma^{-2}ck_p\Delta t - \beta(\xi - \xi_{inj}) = -\int_{\xi_{inj}}^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{\gamma^2[(E_{inj} - \beta\sqrt{E_{inj}^2 - m^2 c^4}) + |e|(\phi(\eta) - \phi(\xi_{inj}))]^2}}}. \quad (8)$$

Соотношения (7), (8) связывают все величины, характеризующие движение электрона (z , E и др.) в начальный момент времени t_{inj} , с соответствующими величинами в любой последующий момент времени. Если теперь рассмотреть два достаточно близких электрона сгустка, отстоящих друг от друга на расстояние $\Delta\xi_{inj}$, то в процессе движения их траектории будут всюду близкими и для каждого момента времени при помощи (7), (8) можно определить текущее расстояние между ними $\Delta\xi$, а также их разброс по энергии ΔE . Для этого достаточно разложить соотношения (7), (8) по малым вариациям координат $\Delta\xi_{inj} = k_p\Delta z_{inj} \ll 1$, $\Delta\xi = k_p\Delta z \ll 1$ и энергии $\Delta E \ll mc^2$ (напомним, что в момент инжекции $\Delta E_{inj} = 0$). Поскольку пучок инжектируется в область максимума потенциала, то удобно в качестве центрального электрона, относительно которого производятся вариации, выбрать тот электрон сгустка, который инжектируется точно в максимум потенциала $\xi_{inj} = \xi_m$, где $\phi(\xi_m) = \phi_{\max}$. Заметим, что по этой причине $d\phi(\xi_{inj})/d\xi = 0$, и в разложении необходимо учитывать члены порядка $\sim(\Delta\xi_{inj})^2$.

Выполняя эту процедуру и решая соответствующие уравнения, находим:

$$\Delta\xi = \frac{E_{inj}p'(\xi)}{E(\xi)p'_{inj}}\Delta\xi_{inj} + \frac{|e|\gamma^2 p'(\xi)}{2mcE(\xi)}I(\xi)\frac{\partial^2\phi(\xi_{inj})}{\partial\xi^2}(\Delta\xi_{inj})^2 \equiv \alpha_1(\xi)\Delta\xi_{inj} + \alpha_2(\xi)(\Delta\xi_{inj})^2, \quad (9)$$

$$\Delta E = |e|\gamma\left\{\frac{E_{inj}p(\xi)d\phi(\xi)}{E(\xi)p'_{inj}d\xi}\Delta\xi_{inj} - \frac{\gamma}{2}\left|\frac{d^2\phi(\xi_{inj})}{d\xi^2}\right|\frac{p(\xi)c}{E(\xi)}\left[\beta + \frac{E'_{inj}(\xi)}{p'_{inj}(\xi)c} + I_2\right](\Delta\xi_{inj})^2\right\}, \quad (10)$$

где

$$I_1(\xi) = \int_{\xi_m}^{\xi} d\eta\{[E'_{inj} + |e|\gamma(\phi(\eta) - \phi(\xi_m))]^2/m^2c^4 - 1\}^{-3/2},$$

$$I_2(\xi) = \int_{\xi_{inj}}^{\xi} \frac{d\eta|e|m^2c^4\gamma\left(\frac{d\phi}{d\eta} - \frac{d\phi}{d\xi}\right)}{\{[E'_{inj} + \gamma|e|(\phi(\eta) - \phi(\xi_{inj}))]^2 - m^2c^4\}^{3/2}}.$$

С помощью соотношения (9) определим теперь формулу для степени укорочения пучка конечной длины L_{b0} , инжектированного специальным образом в окрестности максимума потенциала $[\xi_m + \Delta\xi_0, \xi_m]$, где $\Delta\xi_0 = \Delta\xi_{inj} = -k_pL_{b0}$ – начальная безразмерная длина сгустка ($|\Delta\xi_0| < 1$). Для моноэнергетического однородного сгустка электронов изменение его длины L_b по мере ускорения

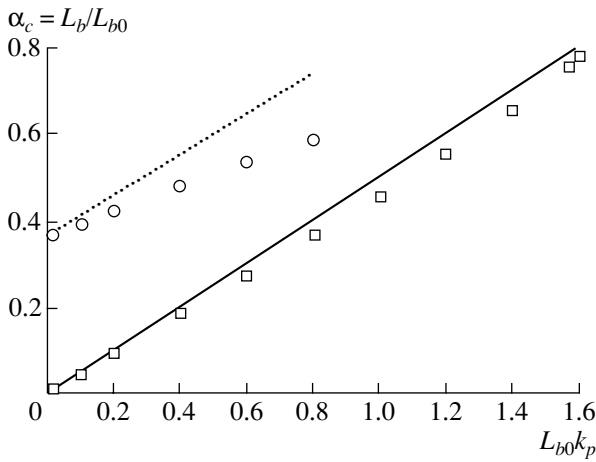


Рис. 1. Коэффициент сжатия электронного сгустка в зависимости от его начальной длины $k_p L_{b0}$ в момент инжекции. Пунктирная и сплошная линии – аналитические вычисления по формуле (9) соответственно для $L_{acc}/L_{ph} = 0.1$ и $L_{acc}/L_{ph} = 0.234$ (момент захвата), отдельные точки (кружки и квадраты) – результаты численного моделирования для этих же длин ускорения соответственно.

(движения относительно волны по координате ξ) в соответствии с (9) представляется формулой

$$\frac{L_b(\xi)}{L_{b0}} = \frac{E_{inj} p'(\xi)}{E(\xi) p'_{inj}} + \frac{|e| \gamma^2 p'(\xi)}{2mcE(\xi)} I(\xi) \left| \frac{\partial^2 \phi(\xi_m)}{\partial \xi^2} \right| k_p L_{b0} \equiv \alpha_1(\xi) + \alpha_2(\xi) k_p L_{b0}. \quad (11)$$

Важным следствием формулы (11) является резкое уменьшение длины сгустка в окрестности точки поворота движения электронов относительно волны ξ_{tr} (их захвата), когда $p'(\xi)$ и, следовательно, $\alpha_1(\xi)$ стремятся к нулю. При этом минимальная длина сгустка определяется только его начальной длиной и формой потенциала волны в точках максимума и захвата электронов:

$$L_b = \alpha_2(\xi_{tr}) k_p L_{b0}^2 = \frac{k_p L_{b0}^2}{2} \frac{|\partial^2 \phi(\xi_m)/\partial \xi^2|}{\partial \phi(\xi_{tr})/\partial \xi}. \quad (12)$$

В частности, для потенциала линейной гармонической волны вида $\phi(\xi) = -\phi_0 \cos(\xi)$ с максимумом в точке $\xi_m = \pi$ максимальное сжатие сгустка, согласно (12), достигается при захвате электронов в точке $\xi_{tr} = \pi/2$, когда его минимальная длина определяется формулой

$$L_b = k_p L_{b0}^2 / 2. \quad (13)$$

Отметим, что в однородной плазме (как и в широком по сравнению с k_p^{-1} плазменном канале) трехмерная структура линейной кильватерной вол-

ны вида (1) такова [15, 16], что точка поворота $\xi_{tr} = \pi/2$ соответствует началу области фазы волны $\xi \in [\pi/2, 3\pi/2]$, в которой радиальные силы кильватерной волны являются фокусирующими (что необходимо для устойчивого ускорения электронов в реальной трехмерной геометрии).

Соотношение (13) показывает, что для эффективного сжатия начальная длина электронного сгустка не должна превышать скин-длины k_p^{-1} , причем степень сжатия (L_{b0}/L_b) увеличивается с уменьшением начальной длины сгустка и не зависит непосредственно от амплитуды и фазовой скорости кильватерной волны (при выполнении, разумеется, условия захвата инжектированных электронов).

Для того, чтобы электроны с начальной энергией E_{inj} (инжектированные в окрестности максимума потенциала ϕ_{max}) были захвачены в заданной точке ξ_{tr} кильватерной волны, перепад потенциала должен удовлетворять условию:

$$|e| [\phi_{max} - \phi(\xi_{tr})] = E_{inj} - [(1 - \gamma^{-2})(E_{inj}^2 - m^2 c^4)]^{1/2} - mc^2 / \gamma. \quad (14)$$

При этом для устойчивого сжатия электронного сгустка (с учетом его поперечного движения) точку захвата следует выбирать так, чтобы вся область движения электронов относительно волны в продольном направлении $\xi \in [\xi_{tr}, \xi_m]$ находилась в фокусирующей фазе. Из формулы (14) следует (и физически это совершенно очевидно), что с ростом фазовой скорости волны и уменьшением энергии инжектируемого пучка для осуществления его захвата необходима кильватерная волна с большей амплитудой. Однако для реально существующих в настоящее время инжекторов с $E_{inj} = 20mc^2$ амплитуда кильватерной волны, достаточная для захвата инжектируемого пучка, оказывается относительно небольшой. Например, для пучка с энергией $E_{inj} = 20mc^2$ при $\gamma = 50$ достаточно использовать кильватерную волну с амплитудой $|e| \phi_0 / mc^2 \geq 0.01$.

Представление о том, как в зависимости от исходной длины инжектируемого пучка изменяется его длина в процессе захвата по мере увеличения нормированной длины ускорения L_{acc}/L_{ph} (где L_{acc} – расстояние, пройденное электронным сгустком в лабораторной системе координат, $L_{ph} = 2\pi \gamma^2 k_p^{-1}$ – максимальная длина ускорения, соответствующая прохождению электроном полного перепада потенциала от ϕ_{min} до ϕ_{max}), можно получить из рис. 1 на примере сгустка электронов, инжектируемого с энергией $E_{inj}/mc^2 = 20$ в кильватерную волну с $\gamma = 50$ и $|e| \phi_0 / mc^2 = 0.01$. Линиями показаны для двух значений длин ускорения

($L_{acc}/L_{ph} \approx 0.1$ и $L_{acc}/L_{ph} \approx 0.233$) аналитические результаты, вычисленные по формуле (11), в которой координата ξ посредством решения уравнений движения выражена через L_{acc}/L_{ph} , а точечные кривые демонстрируют для тех же длин ускорения результаты одномерного численного моделирования динамики сгустков электронов. Для первоначально достаточно короткого электронного сгустка ($k_p L_{b0} \ll 1$, что является условием применимости формулы (11)) рис. 1 показывает хорошее согласие уменьшения относительной длины пучка электронов в одномерной аналитической теории (11) с результатами численного моделирования. Более подробную графическую информацию по сопоставлению аналитических результатов и численного моделирования сжатия сгустков, в том числе в трехмерной геометрии, можно найти в [14]. Следует отметить, что область применимости простых асимптотических формул (12), (13) для минимальной длины электронного сгустка, достигаемой в процессе его сжатия в момент захвата, оказывается шире ограничения $k_p L_{b0} \ll 1$, предполагавшегося при получении формул (11) и (12). Действительно, как показывает рис. 1, выражение для коэффициента сжатия в момент захвата $\alpha_c = k_p L_{b0}/2$ (которое следует из формулы (13) и изображено на рисунке сплошной линией) хорошо описывает результаты одномерного численного моделирования в широком диапазоне начальных длин сгустка, вплоть до значений $k_p L_{b0} \approx \pi/2$ при длине ускорения $L_{acc}/L_{ph} = 0.234$ (что отвечает захвату при $\xi_{tr} = 1.67 \approx \pi/2$ электрона, первоначально находившегося в точке максимума потенциала $\xi_m = \pi$). Для меньших длин ускорения (например, для $L_{acc}/L_{ph} = 0.1$, которое изображено на рис. 1 пунктирной линией) выражение для коэффициента сжатия, полученное с помощью формулы (11), количественно хорошо описывает результаты моделирования только при $k_p L_{b0} \ll 1$.

Относительно изменения энергии электронов сгустка в процессе его захвата необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. Как ясно из вышесказанного, электроны даже достаточно короткого сгустка движутся хотя и по близким, но разным траекториям. Собственно, из-за этого различия траекторий и становится возможным пространственное продольное сжатие сгустка. Однако, с другой стороны, это же различие траекторий неизбежно приводит к тому, что в первоначально моноэнергетическом сгустке после сжатия возникает некоторый разброс по энергии между электронами. Для короткого пучка, инжектированного в область максимального потенциала таким образом, как рассмотрено выше, получаем, согласно (10),

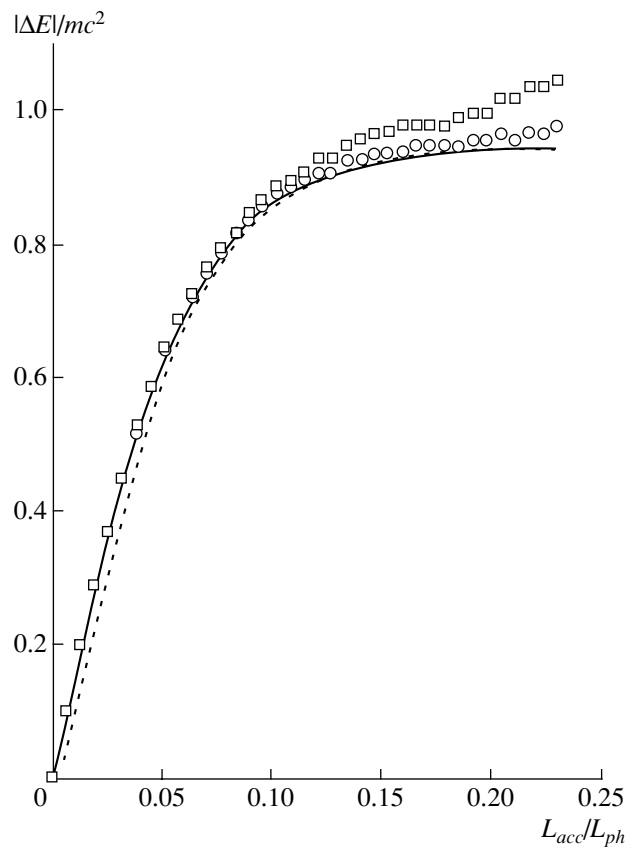


Рис. 2. Изменение разброса по энергии электронов по мере увеличения длины ускорения в кильватерной волне с параметрами $\gamma = 50$, $|e|\phi_0/mc^2 = 0.01$ при его инжекции в максимум потенциала с энергией $E_{inj} = 20mc^2$. Сплошная линия – одномерное численное моделирование; пунктир – аналитический расчет по формуле (13); точечные линии – трехмерное численное моделирование: кружки – $R_b/R_p = 0.033$, квадраты – $R_b/R_p = 0.067$.

следующую формулу для возникающего разброса по энергии:

$$\Delta E = -|e|\gamma \left\{ \frac{E_{inj} p(\xi) d\phi(\xi)}{E(\xi) p'_{inj} d\xi} k_p L_{b0} + \frac{\gamma}{2} \left| \frac{d^2\phi(\xi_{inj})}{d\xi^2} \right| \frac{p(\xi)c}{E(\xi)} \left[\beta + \frac{E'_{inj}}{p_{inj}c} + I_2 \right] (k_p L_{b0})^2 \right\}, \quad (15)$$

где ΔE означает разность в энергии между последним и передним электронами сгустка.

Рисунок 2 демонстрирует, как изменяется в процессе захвата величина разброса в энергии между электронами для пучка начальной длины $L_{b0} = 0.1 k_p^{-1}$ (остальные параметры те же, что и на рис. 1). Сплошная линия показывает результаты численного моделирования для одномерной постановки задачи, пунктирная – аналитический расчет по формуле (15). Некоторое расхождение ли-

ний в малозначащей области коротких длин ускорения связано с неполным учетом в формулах (9), (10) всех членов разложения. В наиболее важной области длин ускорения, когда достигается существенный эффект сжатия сгустка, наблюдается хорошее совпадение аналитических и численных результатов.

На этом же рис. 2 точечные кривые демонстрируют результаты трехмерного численного моделирования динамики электронов [11, 17] для двух значений относительной ширины электронного сгустка $R_b/R_p = 0.033$ (кружки) и 0.067 (прямоугольники) при $k_p R_p = 3.0$, причём поперечное распределение потенциала кильватерной волны в данных расчетах предполагалось гауссовым: $\phi(\xi, r) = -\phi_0 \cos(\xi) \exp[-(r/R_p)^2]$. Хорошее совпадение этих графиков с результатами одномерных расчетов полностью согласуется с выводом, полученным в [14], что для сгустков с радиусом сечения, много меньшим поперечного размера оптимальной области инжекции $R_{\max, \text{opt}}$ (в рассматриваемом примере $R_{\max, \text{opt}} \approx k_p^{-1}$, $R_b \ll R_{\max, \text{opt}}$) и инжектируемых целиком в оптимальную область инжекции, оценку динамики изменения их энергетических и продольных пространственных характеристик можно производить по формулам одномерной теории.

Оценки и проведенные расчеты также показывают, что второе слагаемое в формуле (15) в определенных условиях может быть мало в сравнении с первым, и тогда им можно пренебречь. Так, для рассматриваемых выше параметров: $\gamma = 50$, $E_{inj}/mc^2 = 20$, $|e|\phi_m/mc^2 = 0.01$ ошибка в определении разброса по энергии для пучка начальной длины $L_{b0} = 0.1 k_p^{-1}$ не превышает 0.25% . Это связано с тем, что для рассматриваемых траекторий, когда энергия инжекции сгустка мала в сравнении с резонансной энергией для данной волны $E_{inj} \ll \gamma mc^2$ и захват пучка происходит в области почти линейного участка потенциала (например, при $\xi_{tr} = \pi/2$), в формуле (15) выполняются неравенства $|I_2| \ll 1$ и $|\beta + E'_{inj}/c p'_{inj}| \ll 1$. В этом случае для оценок величины разброса по энергии электронов сгустка в процессе его захвата кильватерной волной можно использовать приближенную формулу

$$|\Delta E| = |e|\gamma \left\{ \frac{E_{inj}}{|p'_{inj}|c} \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} k_p L_{b0} \right\}. \quad (16)$$

Для линейной плазменной волны вида $\phi(\xi, r) = -\phi_0 \cos(\xi)$ и с учётом условия захвата (14) из формулы (16) находим, что на границе фокусирующей фазы соответствующей линейной прост-

ранственной кильватерной волны вблизи точки $\xi_{tr} = \pi/2$

$$|\Delta E| = E_{inj} k_p L_{b0} \sqrt{\frac{E'_{inj} - mc^2}{E'_{inj} + mc^2}}. \quad (17)$$

В пределе $E'_{inj} \gg mc^2$ получаем более простую формулу для оценки разброса по энергии между электронами сгустка вблизи области захвата после его сжатия в линейной волне $|\Delta E| = E_{inj} k_p L_{b0}$.

Представляет интерес на примере одномерного захвата и ускорения сгустка электронов рассмотреть вопрос оптимизации этого процесса с целью получения такого сжатого сгустка, параметры которого позволят в дальнейшем ускорять его до больших энергий без существенного ухудшения его характеристик. С этой точки зрения в одномерной постановке критерием качества сжатого пучка являются малость его длины и минимизация разброса по энергии между составляющими его электронами. Чтобы получить нужный результат, необходимо оптимальным образом выбрать параметры кильватерной волны и инжектируемого в неё пучка. Как уже указывалось выше, сжатие пучка в данной кильватерной волне максимально, если захват сгустка происходит вблизи точки, соответствующей границе фокусирующей фазы пространственной волны. Однако из формулы (12) видно, что линейная кильватерная волна малой амплитуды – вовсе не лучший вариант сжатия пучков, так как для неё коэффициент $\alpha_2(\xi_{tr}) = 1$. В нелинейной кильватерной волне соотношение производных потенциала в коэффициенте $\alpha_2(\xi_{tr})$ может быть существенно меньше, так как в ней с ростом амплитуды волны потенциал в области своего максимума выполаживается, а в точке захвата вблизи границы фокусирующей фазы становится круче. Известно [18], что в предельном случае сильно нелинейной потенциальной волны с перепадом потенциала $|e|\Delta\phi/mc^2 = |e|2\phi_0/mc^2 \gg 1$ ее форма на периоде становится близкой к параболической: $\phi(\xi) = \phi_0(4\xi/\pi - 2\xi^2/\pi^2 - 1)$, где $0 < \xi < 2\pi$. Граница фокусирующей фазы в соответствующей пространственной волне сильно нелинейной кильватерной волне при этом смещается в окрестность точки минимума потенциала (в данном случае $\xi \approx 0$), и для захвата электронов сгустка можно использовать весь перепад потенциала $\Delta\phi = 2\phi_0$ [19]. В соответствии с этим получаем величину коэффициента $\alpha_2 = \pi^{-1}$, т.е. сжатие сгустка в сильно нелинейной волне примерно втрое больше, чем в линейной. Для разброса по энергии между электронами сгустка после захвата в сильно нелинейной волне в пределе $E'_{inj} \gg mc^2$ приходим к оценке $|\Delta E| = E_{inj} k_p L_{b0} 2/\pi$, что также лучше, чем в линейной волне, особенно если принять во внимание, что для волн

бóльшей амплитуды, согласно соотношению (14), соответствующая энергия инжекции для той же точки захвата становится меньше. Отсюда получаем вывод, что в одномерной постановке для качественного сжатия пучков предпочтительнее использовать нелинейные кильватерные волны большой амплитуды. Физически это объясняется просто: чем в бóльшей степени волна нелинейна, тем более близки в энергетическом плане траектории всех электронов сгустка.

3. ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СГУСТКА ПРИ ПОНИЖЕНИИ В УСКОРИТЕЛЬНУЮ СТАДИЮ ПРОЦЕССА

Если начальная энергия сгустка электронов в момент инжекции такова, что их скорость превышает фазовую скорость кильватерной волны, то бунчирующая стадия ускорительного процесса такого сгустка, рассмотренная в разд. 2, отсутствует. В этом случае сгусток сразу попадает в режим ускорения, т.е. длительного и эффективного (в сравнении с бунчирующей стадией) набора энергии. Естественно, что в этом случае необходимо изменить и фазу инжекции сгустка относительно кильватерной волны. Очевидно, что оптимальной областью инжекции вдоль оси кильватерной волны теперь является окрестность вблизи границы фокусирующей фазы ($\xi_{inj} \geq \pi/2$ для потенциала вида $\phi(\xi, r) = -\phi_0 \cos(\xi) \exp[-(r/R_p)^2]$), где градиент потенциала наибольший при наличии положительных фокусирующих сил, действующих на электроны сгустка.

Исследование процесса изменения пространственных и энергетических характеристик короткого первоначально моноэнергетического сгустка на ускорительной стадии можно провести по методике, изложенной в разд. 2, и опираясь на соотношения, аналогичные (4), (5). Следует только иметь в виду, что в данном случае интеграл по траектории в соотношении (5) имеет противоположный знак, поскольку в системе координат, связанной с волной, электроны сгустка сразу будут двигаться в положительном направлении оси OZ' . Вариации переменных $\Delta\xi = k_p L_p$, ΔE в данном случае достаточно проводить до первого порядка, так как всюду по траектории ускорения $d\phi/d\xi \neq 0$. В качестве электрона, относительно которого производятся вариации, выберем последний электрон сгустка. Таким образом, $\Delta\xi$ и ΔE являются разностями по координате и энергии между передним и задним электронами сгустка. В итоге приходим к соотношениям

$$L_b = L_{b0} \frac{\gamma c p'(\xi)}{E(\xi)} \left\{ \beta + \frac{\frac{d\phi(\xi_{inj})}{d\xi} E'(\xi)}{\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} c p'(\xi)} + I_0(\xi) \right\}, \quad (18)$$

$$\Delta E = |e| \gamma^2 k_p L_{b0} \frac{c p(\xi)}{E(\xi)} \times \left\{ \beta \left(\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} - \frac{d\phi(\xi_{inj})}{d\xi} \right) + \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} I_0(\xi) \right\}, \quad (19)$$

где

$$I_0(\xi) = \int_{\xi_{inj}}^{\xi} \frac{d\eta \frac{d\phi(\xi_{inj})}{d\xi} \frac{d^2\phi}{d\eta^2} \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right)^{-2}}{\{1 - m^2 c^4 [E'_{inj} + \gamma |e| (\phi(\eta) - \phi(\xi_{inj}))]\}^{-2/2}}. \quad (20)$$

Для получения более простых формул из соотношений (18), (19) используем оценку

$$\frac{1}{\{1 - m^2 c^4 [E' + \gamma |e| (\phi(\eta) - \phi(\xi_{inj}))]\}^{-2/2}} \geq \frac{E'(\xi)}{c p'(\xi)}, \quad (21)$$

справедливую по всей траектории, т.е. для $\xi_{inj} < \eta < \xi$. С помощью неравенства (21) нетрудно показать, что длина сгустка, по крайней мере, не увеличивается в процессе ускорения, что достаточно очевидно, так как ускоряющая сила, действующая на последний электрон сгустка, в потенциале данного вида и при выбранном условии инжекции (см. выше) всегда больше, чем на передний. Соответственно для разброса по энергии после ускорения электронов сгустка получается оценка снизу:

$$|\Delta E(\xi)| > k_p L_{b0} \gamma |e| \left| \frac{p(\xi)}{p'(\xi)} \left| \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} - \frac{d\phi(\xi_{inj})}{d\xi} \right| \right|. \quad (22)$$

Для оценок снизу максимальной величины разброса по энергии между электронами первоначально моноэнергетического ускоряющегося сгустка можно использовать и более простую приближенную формулу, если в системе координат, связанной с волной импульс электрона после ускорения уже достаточно большой, $p'(\xi) \gg mc$. А именно тогда

$$|\Delta E| \approx 2\gamma^2 |e| k_p L_{b0} \left\{ \frac{d\phi(\xi_{inj})}{d\xi} - \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right\}, \quad (23)$$

которая, однако, существенно точнее формулы, полученной в [20]. Все вышеприведенные формулы для разброса электронов по энергии в сгустке указывают на то, что величина разброса тем больше, чем более нелинейный участок потенциала используется для ускорения электронов. Кроме того, она прямо пропорциональна начальной длине ускоряемого пучка.

Для проверки полезности полученных формул для оценки энергетического разброса между электронами ускоряющегося сгустка было выполне-

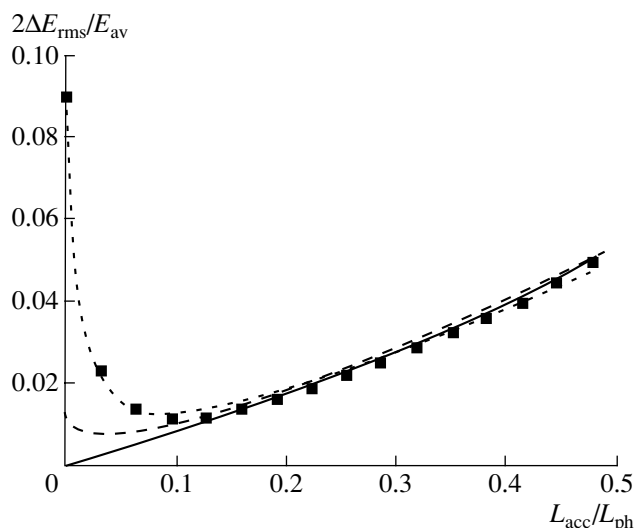


Рис. 3. Изменение энергетических характеристик различных сгустков в зависимости от длины ускорения на ускоряющей стадии (E_{av} – средняя энергия и ΔE_{rms} – среднеквадратичное отклонение по энергии по распределению электронов сгустка). Параметры расчетов, соответствующих различным кривым, указаны в тексте.

но несколько моделирующих расчетов. В качестве первого примера был смоделирован одномерный процесс ускорения сгустка, сформированного на бунчирующей стадии из одномерного моноэнергетического пучка электронов с энергией $E_{inj} = 20mc^2$ плазменной волной с параметрами $\gamma = 50$, $|e|\phi_0/mc^2 = 0.01$. Продольный размер инжектируемого пучка на стадии захвата выбирался таким образом, чтобы полностью заполнить в продольном направлении оптимальную область инжекции [14], так что в процессе захвата все электроны инжектируемого пучка не выходят за границу фокусирующей зоны соответствующей линейной кильватерной волны (подробнее об этом примере формирования компактного сгустка см. [13]). Сформированный сгусток после захвата при достижении электронами резонансной энергии $\approx 50mc^2$ имел длину $L_b = 0.1k_p^{-1}$ и затем инжектировался в ускорительную стадию с параметрами плазменной волны $|e|\phi_0/mc^2 = 0.3$, $\gamma = 50.0$, в область максимального ускоряющего поля ($\xi_{inj} \approx \pi/2$ для потенциала вида $\phi(\xi) = -\phi_0 \cos(\xi)$). Изменение относительного среднеквадратичного разброса по энергии электронов в таком сгустке при его ускорении изображено на рис. 3 коротким пунктиром.

Сплошной линией на рис. 3 показан рост в процессе ускорения в той же кильватерной волне относительного среднеквадратичного разброса по энергии электронов, определенный с использованием аналитической формулы (23), в изначально моноэнергетическом сгустке с энергией инжек-

ции $E_{inj} = 50mc^2$ и начальной длиной $L_{b0} = 0.1k_p^{-1}$. Величина среднеквадратичного разброса оценивалась в предположении, что в известном диапазоне энергий (23) электроны распределены равномерно. Из рисунка следует, что даже при наличии начального разброса по энергии в инжектируемом сгустке, как это имеет место в первом примере, в дальнейшем, начиная с некоторого момента, графики почти совпадают. Это подтверждает аналитические результаты и указывает на то, что оценка снизу по формуле (23) фактически является весьма точной и может быть использована напрямую как оценочная для определения разброса по энергии в ускоряющемся сгустке, если длина ускорения не слишком мала в сравнении с максимально возможной. Несущественность первоначального разброса по энергии в сгустке в момент инжекции его в ускорительную стадию означает, что в данном случае в самом процессе ускорения накапливается дополнительный разброс в энергии между электронами, который в конечном счете перекрывает начальный разброс и является более значимым.

Далее, длинным пунктиром на рисунке показана динамика изменения относительного среднеквадратичного разброса по энергии при ускорении сгустка такой же начальной длины $L_{b0} = 0.1k_p^{-1}$, который был сформирован аналогичным образом, как в первом случае, но его формирование осуществлялось в той же самой плазменной волне, которая используется для ускорения, т.е. с параметрами $|e|\phi_0/mc^2 = 0.3$, $\gamma = 50.0$. Поскольку амплитуда этой волны больше, чем в первом случае, то энергия электронов пучка, из которого формировался на бунчирующем этапе сгусток для последующего ускорения, была меньше и равнялась $E_{inj} = 1.87mc^2$. Отличие этого модельного расчета от первого состоит только в том, что в момент инжекции в ускорительную стадию эти сгустки имеют разный начальный разброс по энергии между составляющими их электронами. Отметим, что начальный разброс в рассмотренных примерах с хорошей точностью оценивается с помощью формулы (17). Хорошее совпадение обоих модельных расчетов на больших длинах ускорения означает, что для данных параметров ускорительного процесса между ними нет принципиальной разницы с точки зрения качества продольных пространственных и энергетических характеристик ускоренного до больших энергий сгустка, хотя с аналитическими результатами последний пример согласуется лучше..

Представляет интерес сравнить результаты одномерных модельных расчетов и аналитического предсказания с результатами трехмерного моделирования. На рис. 3 заштрихованными квадратами нанесены точки, соответствующие относительному среднеквадратичному разбросу по энер-

гии в ускоряющемся сгустке, сформированном из объемного моноэнергетического пучка радиуса $R_b = 0.5 k_p^{-1}$ и в начале бунчирующей стадии (в момент инжекции) полностью заполняющим оптимальную область инжекции в продольном направлении. Как бунчирующее, так и ускоряющее кильватерное поле имели потенциал вида $\phi(\xi) = -\phi_0 \cos(\xi) \exp(-(R/R_p)^2)$ при $R_p = 3.0 k_p^{-1}$ с параметрами кильватерной волны на бунчирующей стадии $\gamma = 50$, $|e|\phi_0/mc^2 = 0.01$ и на ускорительной стадии $\gamma = 50.0$, $|e|\phi_0/mc^2 = 0.3$. Остальные параметры инжектируемого протяженного пучка и схема бунчировки и ускорения соответствуют первому рассмотренному примеру (подробнее с этим можно ознакомиться в [14]). Рисунок демонстрирует хорошее совпадение точек с ранее полученными графиками, что и следовало ожидать, так как электроны данного сгустка инжектировались в оптимальную зону инжекции и исходный радиус инжектируемого пучка в бунчирующую стадию меньше $R_{\max, \text{opt}}$ для данных параметров пучка и бунчирующего поля.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное аналитическое исследование позволяет лучше понять механизм изменения продольных пространственных и энергетических характеристик электронных сгустков, в различных условиях инжектируемых в кильватерную волну.

Изучен процесс сжатия коротких сгустков ($k_p L_b \ll 1$) под действием кильватерной волны, когда энергия инжекции электронов такова, что их начальная скорость меньше фазовой скорости волны. Показано, как уменьшается длина сгустка в процессе его захвата кильватерной волной и как возрастает разброс по энергии электронов, составлявших первоначально моноэнергетический сгусток. Получены простые аналитические формулы, позволяющие оценивать эти характеристики. Сравнение аналитических результатов с численным моделированием демонстрирует их хорошее совпадение. Показано, что данный механизм группировки электронов может быть использован для подготовки пучков к более оптимальному последующему ускорению. Обсуждена оптимизация процесса сжатия захватываемых пучков с целью обеспечения их дальнейшего качественного ускорения.

Рассмотрен процесс изменения параметров короткого сгустка на ускорительной стадии, когда скорость инжектируемых электронов превышает фазовую скорость волны. Показано, что длина ускоряющегося сгустка в этом случае меняется мало и не увеличивается, а разброс по энергии между электронами сгустка возрастает. Конечный разброс по энергии пропорционален началь-

ной длине пучка, поэтому для получения качественных ускоренных сгустков рекомендуется использовать для ускорения минимально короткие сгустки или подвергать их предварительному сжатию. Показано, что полученные аналитические формулы весьма полезны для оценок с хорошей точностью продольных пространственных и энергетических характеристик электронных сгустков на бунчирующей и ускоряющей стадиях при условии, что изначально сгусток инжектировался в оптимальную зону инжекции.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-02-16263.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nakajima K., Fisher D., Kawakubo T. et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4428.
2. Modena A., Najmudin Z., Dangor A.E. et al. // Nature. 1995. V. 377. P. 606.
3. Umstadter D., Chen S.J., Mourou G. et al. // Science. 1996. V. 273. P. 472.
4. Esarey E., Sprangle P., Krall JI, Ting A. // IEEE Trans. Plasma Science. 1996. V. 24. P. 252.
5. Андреев Н. Е., Горбунов Л. М. // УФН. 1999. Т. 169. С. 1.
6. Pogorelsky I.V. // Proc. of the Intern. Conf. on LASERS'97. New-Orleans, LA, . 1997 / Ed. by J.J. Carroll, T.A. Goldman. STS Press, McLean, VA, 1998. P. 868.
7. Ogata A., Nakajima K., Kozawa T., Yoshida Y. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1996. V. 24. P. 453.
8. Pogorelsky I.V., Andreev N.E., Kuznetsov S.V. // Proc. of Conf. "Advanced Accelerator Concepts", USA, 1998. USA, AIP, 1999.
9. Ogata A., Nakajima K., Andreev N. // J. Nucl. Mat. 1997. V. 248. P. 392.
10. Андреев Н. Е., Горбунов Л. М., Кузнецов С. В. // Физика плазмы. 1995. Т. 21. С. 1099.
11. Andreev N. E., Gorbunov L. M., Kuznetsov S. V. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1996. V. 24. P. 448.
12. Pogorelsky I.V., Kimura W.D., Quimby D.C. et al. // Proceedings of XVII Intern.l Conf. on Coherent and Nonlinear Optics. Moscow, 1998. SPIE, 1999. V. 3735. P. 175.
13. Андреев Н.Е., Кузнецов С.В. // Кр. сообщ. по физике ФИАН, 1999. № 1. С. 9.
14. Andreev N.E., Kuznetsov S.V // IEEE Trans. Plasma Sci. 2000. № 4. P. 28.
15. Горбунов Л. М., Кирсанов В. И. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 509.
16. Andreev N. E., Gorbunov L.M., Kirsanov V.I. et al. // Phys. Plasmas. 1997. V. 4. P. 1145.
17. Andreev N.E., Frolov A.A., Kuznetsov S.V. et al. // Proc. of the Intern. Conf. on LASERS'97. New-Orleans, LA, 1997 / Ed. by J.J. Carroll, T.A. Goldman. STS Press, McLean, VA. 1998. P. 875.
18. Dawson J.M. // Phys. Rev. 1959. V. 113. P. 383.
19. Андреев Н.Е., Кузнецов С.В. // Физика плазмы. 1999. Т. 25. С. 810.
20. Wilks S., Katsouleas T., Dawson J.M. et al. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1987. V. 15. P. 210.