ТОЧНОЕ КЕПЛЕРОВСКОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО МИКРОПОЛЯ В НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

М.Ю.Романовский (*ИОФ РАН*), В.Эбелинг (*HUB*)

Научно-координационная сессия

"Исследования неидеальной плазмы"

4 декабря 2007, ОИВТ РАН

СОДЕРЖАНИЕ

ЧЕМ ИНТЕРЕСЕН КЕПЛЕРОВСКИЙ ПОДХОД?

- Автоматически получается значение микрополя в точке расположения заряда – обычно эта проблема решается (численно) учетом парной корреляционной функции

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА В ШАРЕ РАДИУСА *R*

- Трехмерное движение

$$W_3(E) = \frac{3E_{\min}^{3/2}}{2E^{5/2}}$$

- Двумерное движение

$$W_3(E) = \frac{E_{\min}}{E^2}$$

- Минимальное поле $E_{\min} = q / R^2$

ПЕРЕХОД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА

- Характеристическая функция распределения «ближайшего соседа»:

$$\varphi(K_x) = \frac{3}{5}\left[\frac{\sin(K_x E_{\min})}{K_x E_{\min}} + \frac{2}{3}\cos(K_x E_{\min})\right] - \frac{2\sqrt{2\pi}}{5}(K_x E_{\min})^{3/2} -$$

$$\frac{4}{5}(K_x E_{\min})\sin(K_x E_{\min}) + \frac{4\sqrt{2\pi}}{5}(K_x E_{\min})^{3/2} C\left(\sqrt{\frac{2K_x E_{\min}}{\pi}}\right)$$

В РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХОЛЬТСМАРКА

- Характеристическая функция распределения Хольтсмарка

$$\varphi_H(K_x) = \varphi^N(K_x) \xrightarrow[E_{\min}\to 0]{}$$

$$\left[1 - \frac{1}{N}\left(K_x E_{\min} \frac{2\pi^{2/3}}{5^{2/3}} N^{2/3}\right)^{3/2}\right]^N \to \exp(-K_x^{3/2} E_H^{3/2})$$

- Здесь характеристическое поле

$$E_H = 2\pi(4/15)^{2/3} q n^{2/3}$$

ФОРМУЛА ХОЛЬТСМАРКА (1919 г.)

- Поле в произвольной точке достаточно большого объема плазмы; все частицы движутся свободно

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$$

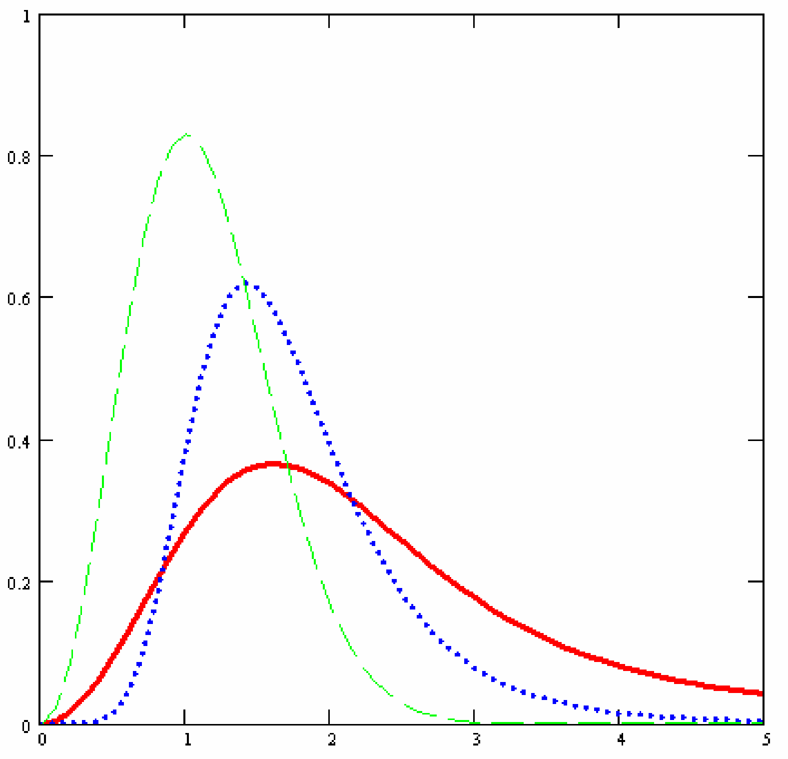
- Распределение Хольтсмарка

$$W(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty x \sin(\beta x) \exp(-x^{3/2}) dx$$

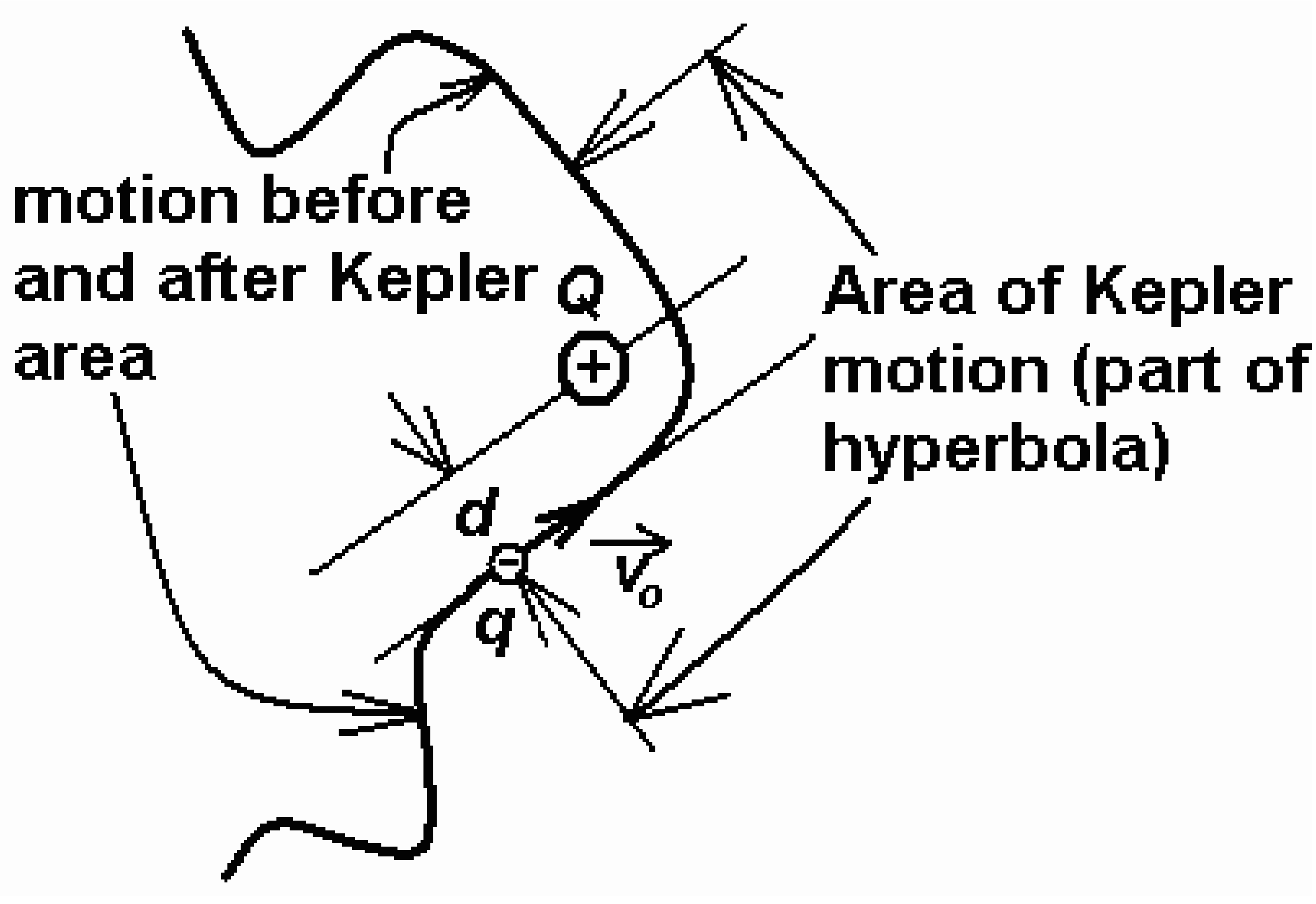
$$\beta = E / E_H$$

ПРОБЛЕМЫ МИКРОПОЛЯ В ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

- Параметр неидеальности
$$\Gamma = qQn^{1/3} / T$$
- Свободного движения частиц нет
- При увеличении Γ система все ближе к твердому телу, а распределение микрополя к Гауссу



КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ



2-ой ЗАКОН КЕПЛЕРА. МИКРОПОЛЕ

- Запишем второй закон Кеплера в форме

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{r^2}{dv_0}$$

- Распределение электрического микрополя – вероятность найти частицу q в определенной точке траектории, поэтому

$$W_3(r) = const \text{""""} \frac{dt}{d\phi}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОПОЛЯ

- Электрическое поле всегда $E = q / r^2$
- Поэтому $$W_3(\phi(E)) = \frac{const''''}{d v_0 E}$$
- Изменяя измеряемую переменную по формуле $$W_3(E) = W_3(\phi(E)) \frac{d\phi}{dE}$$
- получим условное распределение

$$W_3(E)_{v_0,d} = \frac{const'''}{E^2 v_0} \frac{\sqrt{d^2 + \delta^2}}{\sqrt{\frac{q}{E} \pm 2\delta \sqrt{\frac{q}{E} - d^2}}} \qquad \delta = qQ / m v_0^2$$

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

- Для идеальной плазмы $v_0 \to \infty$

$$W_3(E)_{v_0 \to \infty, d} = \frac{const'''}{E^2 v_0} \frac{d}{\sqrt{\frac{q}{E} - d^2}}$$

- Это – также условное распределение. Интегрируя от 0 до $d_{\max} = q / E$, получим

$$W_3(E)_{v_0 \to \infty, <d>} = \frac{Const}{E^{5/2}}$$

- - безусловное распределение ближайшего соседа

ОБЩЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА

- Интегрируя общую формулу от 0 до

$$d_{\max} = \sqrt{\frac{q}{E} \pm 2\delta \sqrt{\frac{q}{E}}}$$

- по прицельному параметру и усредняя по Максвеллу скорость, получим общее выражение для безусловного распределения ($a = qQ / T(E / q)^{1/2}$)

$$W_3(E)_{<v_0>,<d>} = \frac{const}{E^{5/2}} \int_{0,a}^{\infty} \exp(-x^2)\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$$

ТОЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОПОЛЯ

- Следует образовать характеристическую функцию точного распределения ближайшего соседа, возвести ее в степень *N*, и взять обратное преобразование Фурье, т.е.

$$W_3(E) = \frac{2E}{\pi}\int_0^{\infty} K\sin(KE)\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\infty} d\vec{E}\exp(-i\vec{K}\vec{E})W_3(E)_{<v_0>,<d>}\right]^N dK$$

- Точность определяется физической возможностью выделить «Кеплеровскую» пару частиц

ОБЩЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА В ФУНКЦИЯХ МАКДОНАЛЬДА

- Физический смысл параметра a

$$a^2 = \frac{Qq}{T}\sqrt{\frac{E}{q}} \simeq 1.6\Gamma\sqrt{\frac{E}{E_H}}$$

- Распределение ближайшего соседа

$$W_3(E)_{<v_0>,<d>} = \frac{const_{\pm}}{E^{5/2}} a^2 \exp(\pm a^2)[K_1(\frac{a^2}{2}) \pm K_0(\frac{a^2}{2})]$$

- Верхний знак соответствует притягивающимся частицам

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ МАЛЫХ Γ

- Если движение частиц «практически» независимое, то $a \to \infty$, и

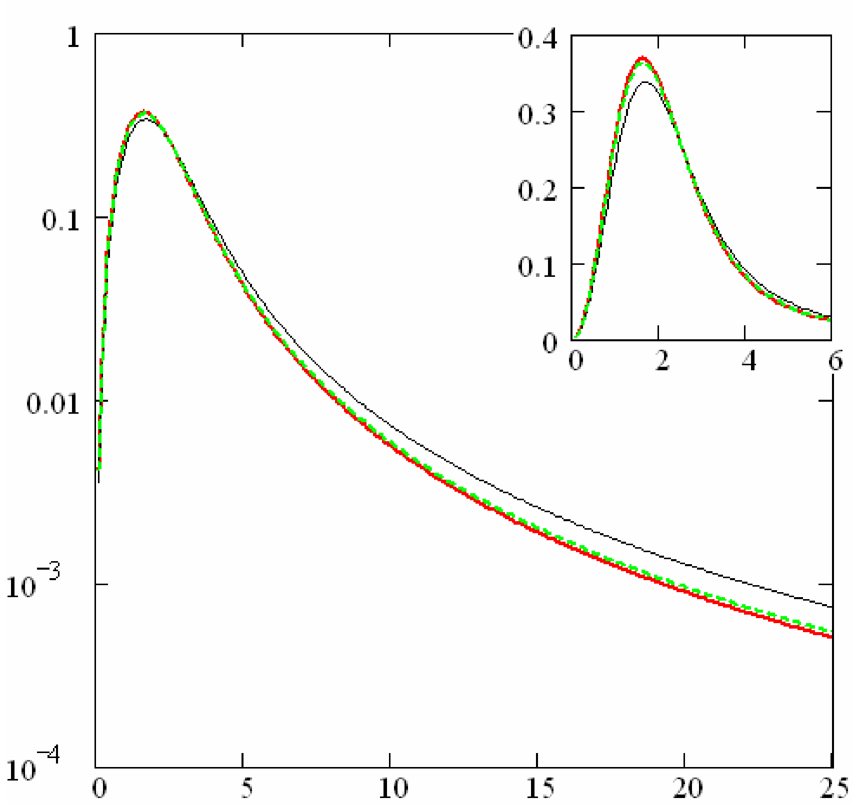
$$W_3(E)_{<v_0>,<d>} = \frac{const_\pm}{E^{5/2}}\left(1 \pm \frac{a^2}{2}\ln\frac{4}{Ga^2}\right)$$

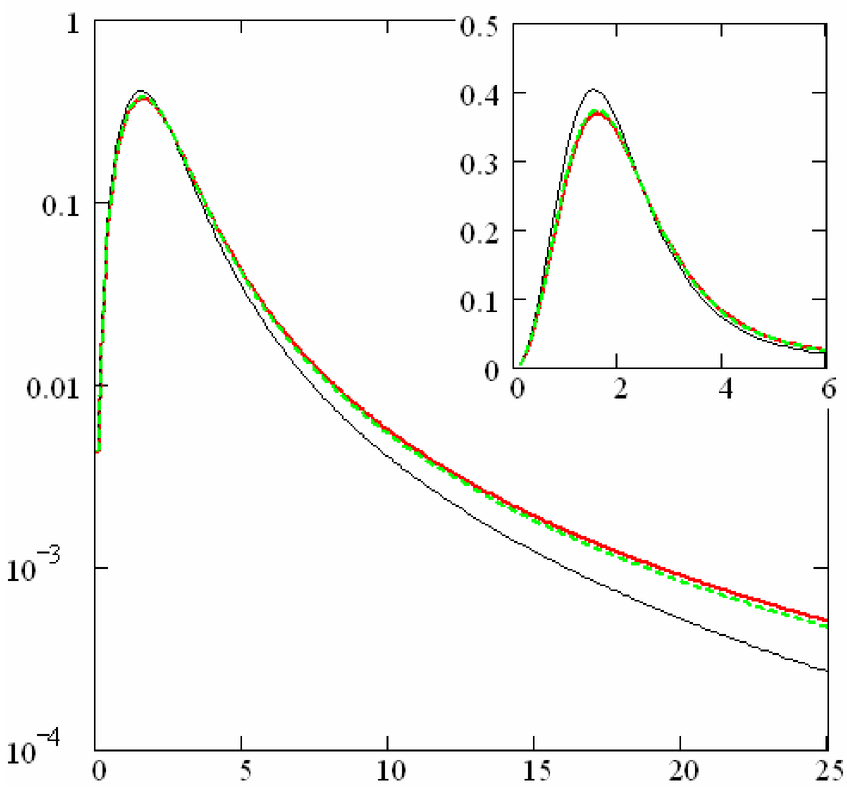
- Финальная характеристическая функция

$$C_N(K) \simeq \exp\left[-(KE_H)^{3/2} \pm KE_H\frac{\Gamma}{4}\left(\frac{15}{4}\right)^{2/3}\psi\right]$$

- Здесь $\psi \simeq -1.571 \bullet \ln\frac{1}{\Gamma} + 0.394$, и теперь верхний знак соответствует двухкомпонентной плазме

ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТ Γ





однокомпонентная плазма　　двухкомпонентная плазма

Γ=0 (Хольтсмарк), Γ=0.05, Γ=0.1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОПОЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ Г. ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ ПЛАЗМА

- При больших параметрах неидеальности

$$\frac{a^2}{2}\exp(\pm a^2)[K_1(\frac{a^2}{2})\pm K_0(\frac{a^2}{2})]\simeq\sqrt{\pi}a$$

- то-есть распределение ближайшего соседа $W_{3,+\Gamma>>1}\simeq\frac{A}{E^{9/4}}$
- Характеристическая функция

$$C_{+N\Gamma\gg1}\simeq\exp\left[-1.43\sqrt{\Gamma}(KE_H)^{5/4}\right]$$

- Асимптотика распределения

$$W_3(\beta_1)_{+\Gamma>>1}\simeq\frac{5E_1^{5/4}}{4E^{9/4}}=\frac{5}{4\beta_1^{9/4}}$$

- с нормировкой $\beta_1=E/E_1\leftrightarrow E_1\simeq3.48\Gamma^{2/5}E_H$

КАК ВСЕ ЭТО ПОНИМАТЬ?

- Для малых параметров неидеальности приближение очевидно удовлетворительное как для однокомпонентной, так и для двухкомпонентной плазмы.
- При больших параметрах неидеальности вероятность найти третью частицу в окрестности кеплеровской пары ~ $(E_H / E)^{3/2}$
- Это означает, что хотя бы асимптотика распределения для двухкомпонентной плазмы точна.
- Что такое закон 9/4 в двухкомпонентной плазме?

КРЫЛО ШТАРКОВСКОЙ ЛИНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

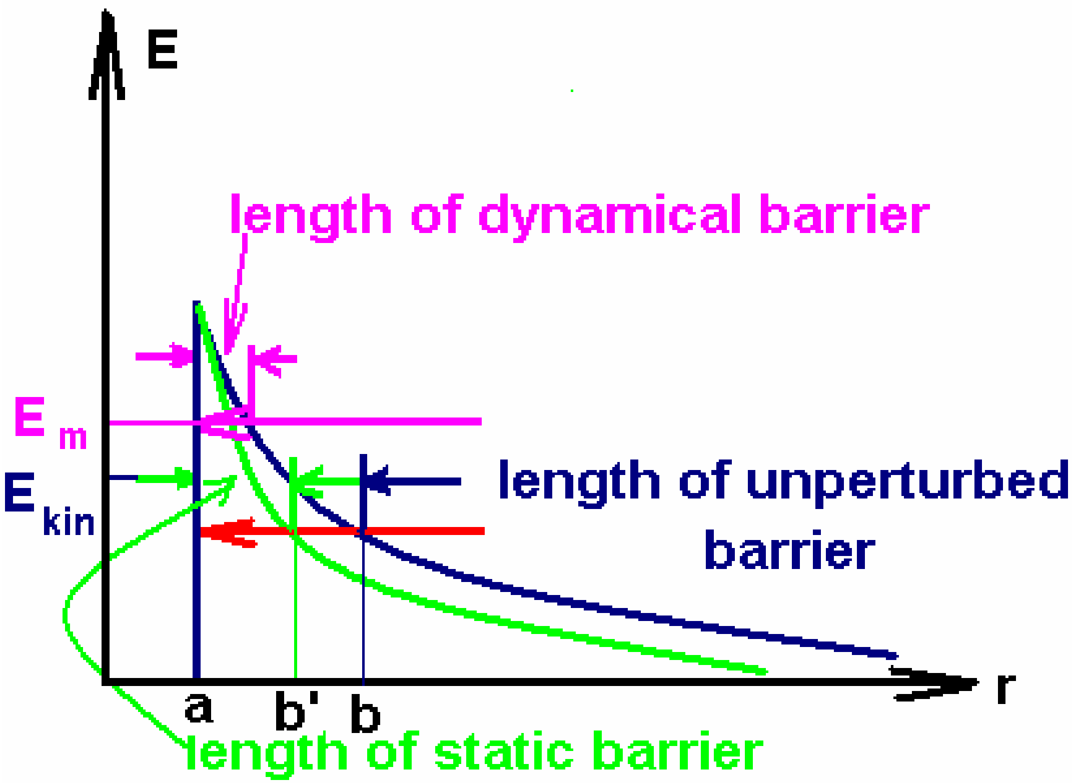
- В идеальной плазме ионное и электронное микрополя вносят одинаковый вклад в крыло излучения штарковской линии: по

$$I_{mn} = \frac{2\pi^2 C^{3/2} n}{\left|\omega - \omega_{mn}\right|^{5/2}}$$

- В неидеальной плазме вклад электронного микрополя увеличивается:

$$I^e_{mn} \simeq \frac{6.96\pi^2 \Gamma^{2/5} C^{5/4} n^{5/6}}{\left|\omega - \omega_{mn}\right|^{9/4}}$$

РЕАКЦИЯ СЛИЯНИЯ ЯДЕР



- Статическое подавление кулоновского барьера: ввиду экранирования
- Динамическое подавление кулоновского барьера: за счет ускорения электрическим микрополем соударяющихся ядер

ТЕОРИЯ ГАМОВА -ТОМПСОНА

- Вероятность *W* прохождения барьера

$$W \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b pdr\right)$$

- Без микрополя:

$$W_G \sim \exp\left(-\pi\frac{Z^2e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E_{kin}}}\right)$$

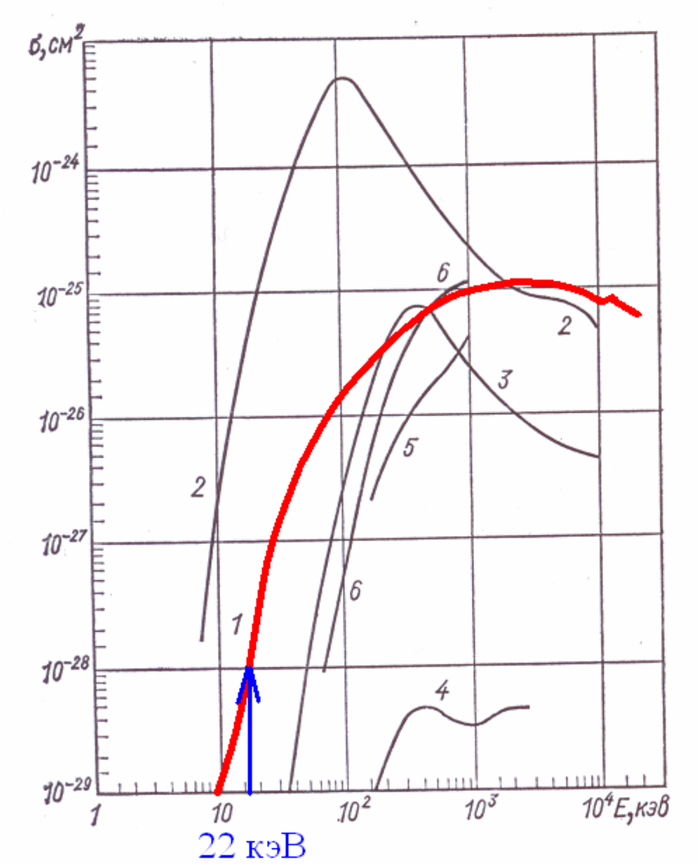
- При (большом)микрополе:

$$W \sim \exp\left(-\frac{8K(1/\sqrt{2})}{3\hbar}\sqrt[4]{\frac{Z^5m^2e^5}{E}}\right)$$

- Фактически $E_{kin} \to 0.81\sqrt{Z^3e^3E}$

СЕЧЕНИЕ D-D РЕАКЦИИ

- «Хольсмарковское» сечение
  $$\sigma_{5/2} \simeq 1,27 \cdot 10^5 \frac{Ane^6}{B}$$
- «Кеплеровское» сечение
  $$\sigma_{9/4} \simeq 0,73\sqrt{\Gamma}\sigma_{5/2}$$
  $$\sim 0.1 mbarns$$
- для D-D реакции, *Г=100* и
  $$n = 5 \cdot 10^{22} cm^{-3}$$



СЛИЯНИЕ ЯДЕР ENHANCEMENT FACTOR

Реакция, среда	Статический фактор, **ln**	Holtsmark dynamic factor, **ln**	Kepler dynamic factor, **ln**
C-C белый карлик (T= 4.5 keV, n~10^{32} cm^{-3})	56.6	88.5	120
He-He белый карлик (T= 0.9 keV, n=$1.47\cdot10^{31}cm^{-3}$)	~22	28.6	37
Солнце p-p (T= 1.3 keV, n = $3.3\cdot10^{25}$ cm^{-3})	~5%	0.0026%	-
ЛТС D-T (T= 5 keV, n = $0.7\cdot10^{25}$ cm^{-3})	0.9%	0.00038%	-