Электростатическое взаимодействие макрочастиц на малых расстояниях

А.В. Филиппов

ГНЦ РФ ТРИНИТИ,

142190 Россия, г.Троицк, Московская обл.

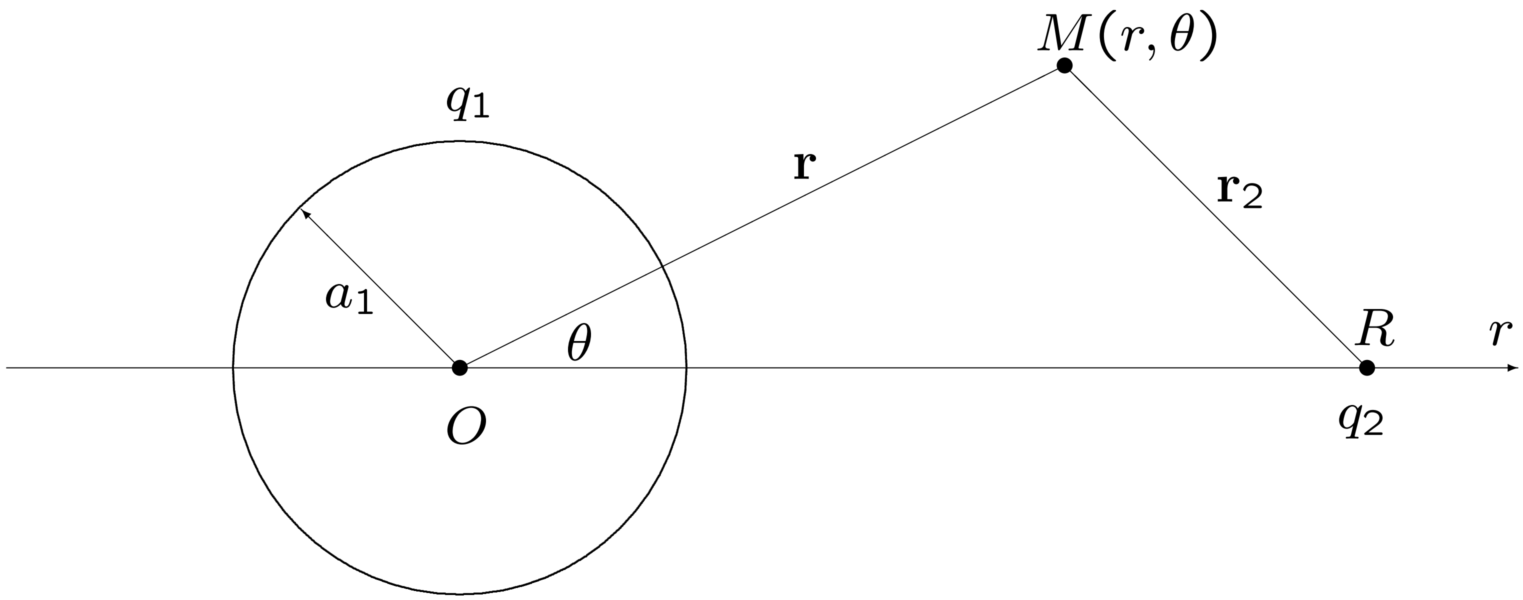
fav@triniti.ru

План

1) Электростатическое взаимодействие макрочастицы конечного размера с точечным зарядом в равновесной плазме

2) Электростатическое взаимодействие двух заряженных макрочастиц в вакууме

Геометрия взаимодействия точечного заряда с макрочастицей



В равновесной плазме потенциал определяется линеаризованным уравнением Пуассона-Больцмана

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)-k_D^2\phi=0$$

Для точечного заряда решением является дебаевский потенциал:

$$\phi_2(r_2)=\frac{eq_2}{r_2}\,e^{-k_D r_2}$$

Потенциал макрочастицы определяется из уравнения:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}\right)-k_D^2\phi_1=0$$

Общее решение, обращающееся в нуль на бесконечности, имеет вид:

$$\phi_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) \frac{K_{n+\frac{1}{2}}(k_D r)}{\sqrt{r}}$$

Коэффициенты A_n определяются граничными условиями:

$$\phi(r,\theta)|_{r=a_1} = (\phi_1+\phi_2)|_{r=a_1} = \phi_0;$$

$$\oint_S \sigma a_1^2 d\Omega = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a_1} a_1^2 \sin\theta d\theta = eq_1$$

Формула сложения Макдональда

$$\frac{\exp(-k_D r_2)}{r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(k_D r)\, K_{n+\frac{1}{2}}(k_D R)}{\sqrt{rR}}$$

Коэффициенты разложения:

$$A_0 = \frac{e q_1}{k_D a_1 \sqrt{a_1} K_{\frac{3}{2}}(k_D a_1)} + \frac{e q_2 K_{\frac{1}{2}}(k_D R)}{\sqrt{R}} \frac{I_{\frac{3}{2}}(k_D a_1)}{K_{\frac{3}{2}}(k_D a_1)},$$

$$A_n = -(2n+1) \frac{e q_2 K_{n+\frac{1}{2}}(k_D R)}{\sqrt{R}} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(k_D a_1)}{K_{n+\frac{1}{2}}(k_D a_1)}, \qquad n \geq 1$$

Потенциал поверхности макрочастицы

$$\phi_0 = \frac{1}{1+k_D a_1}\left[\frac{eq_1}{a_1} + \frac{eq_2}{R}\, e^{-k_D(R-a_1)}\right]$$

Монопольный член

$$\phi_{1,0}\,(r,R) = \frac{eq_1}{(1+k_D a_1)}\,\frac{e^{-k_D(r-a_1)}}{r} +$$
$$+\frac{eq_2}{r}\,\frac{e^{-k_D(R+r)}}{2k_D R}\left[1 - \frac{1-k_D a_1}{1+k_D a_1}\, e^{2k_D a_1}\right]$$

Потенциальная или свободная энергия взаимодействия

$$\mathcal{F} = eq_2\phi_1\Big|_{\substack{r=R\\ \theta=0}}$$

В пылевой плазме обычно $k_D a_1 \ll 1$,

поэтому

$$\mathcal{F} = \frac{e^2 q_1 q_2}{R}\, e^{-k_D R}\left(1 + \tfrac{1}{2}k_D^2 a_1^2\right) + \tfrac{1}{3}k_D^2 a_1^3 \frac{e^2 q_2^2}{R^2}\, e^{-2k_D R} -$$

$$- \frac{2e^2 q_2^2}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} K^2_{n+\frac{1}{2}}(k_D R)\, \frac{(k_D a_1)^{2n+1}}{[(2n-1)!!]^2}$$

При $k_D R \gg 1$ на больших межчастичных расстояниях

$$\mathcal{F}_D = \frac{e^2 q_1 q_2}{R}\, e^{-k_D R}\left(1 + \tfrac{1}{2} k_D^2 a_1^2\right)$$

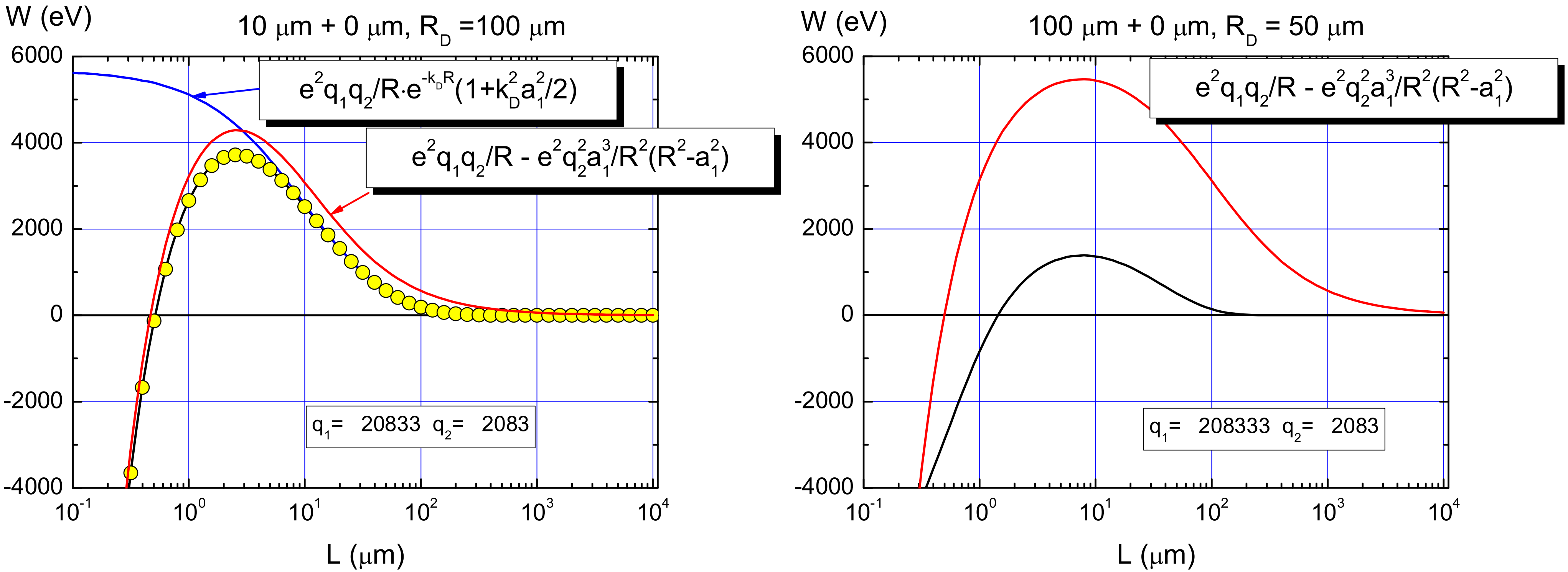
При $k_D R \ll 1$ на малых расстояниях между макрочастицей и точечным зарядом

$$\mathcal{F} = \frac{e^2 q_1 q_2}{R}\, e^{-k_D R}\left(1 + \tfrac{1}{2} k_D a_1^2\right) - \\ - \frac{e^2 q_2^2}{R}\frac{a_1}{R}\frac{a_1^2}{R^2 - a_1^2}$$

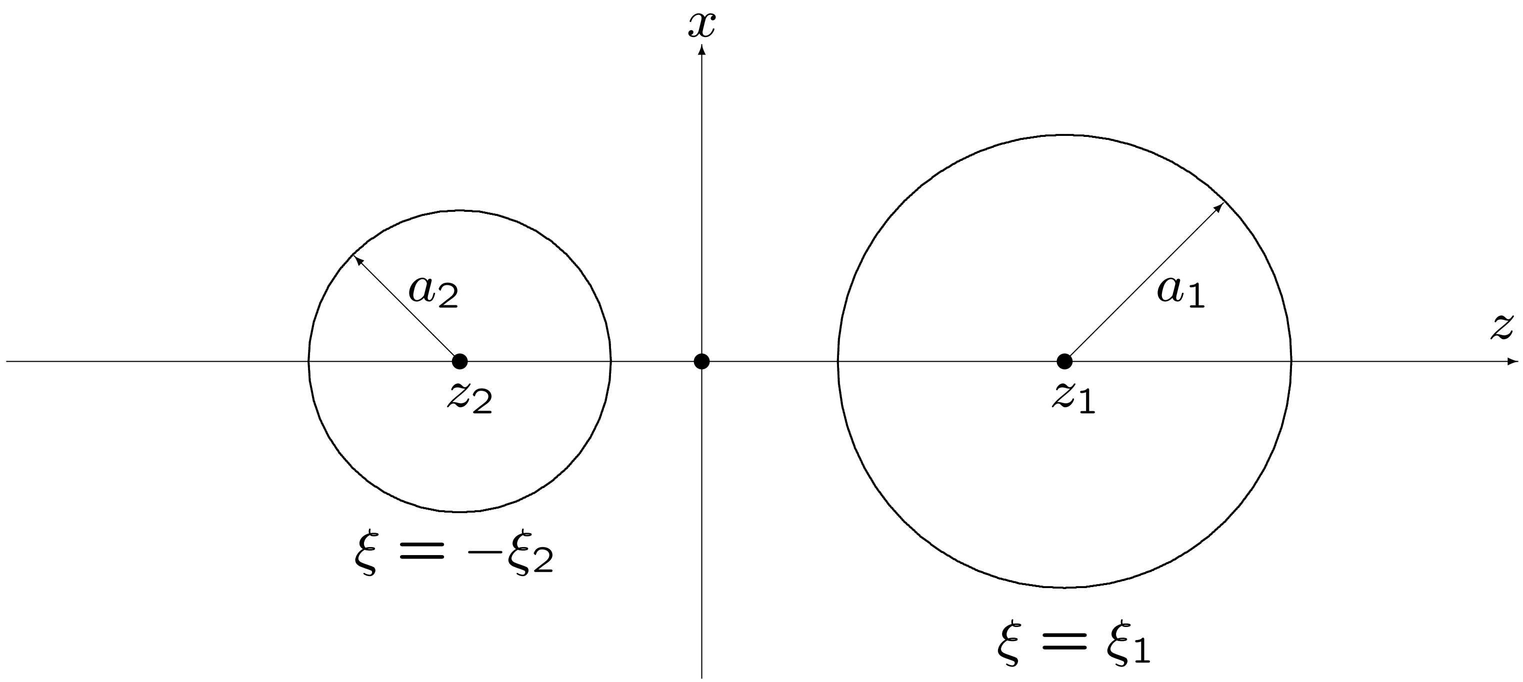
При $k_D = 0$ это выражение переходит в

$$W_{\text{vac}} = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} - \frac{e^2 q_2^2}{R^2}\frac{a_1^3}{R^2 - a_1^2}$$

Зависимость потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом



Взаимодействие двух макрочастиц конечного размера



Уравнение Лапласа в бисферических координатах

$$\triangle\phi = \frac{(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^3}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) +$$
$$\left.\frac{1}{\sin^2\eta\,(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2}\right] = 0$$

Подстановкой $\phi = \psi\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}$ уравнение Лапласа "разделяется". Решение имеет вид:

$$\psi(\xi,\eta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell \operatorname{ch}\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)\xi + B_\ell \operatorname{sh}\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)\xi\right] P_\ell(\cos\eta)$$

Коэффициенты разложения

$$A_\ell = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 + \xi_2)} \times$$
$$\times \left[\phi_1 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1} \operatorname{sh}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_2 + \phi_2 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2} \operatorname{sh}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_1\right]$$

$$B_\ell = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 + \xi_2)} \times$$
$$\times \left[\phi_1 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1} \operatorname{ch}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_2 - \phi_2 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2} \operatorname{ch}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_1\right]$$

Плотность поверхностного заряда

$$\sigma_1(\eta) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial n}\bigg|_{\xi=\xi_1} = \frac{1}{4\pi h_\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\xi_1}$$

$$\sigma_2(\eta) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial n}\bigg|_{\xi=-\xi_2} = -\frac{1}{4\pi h_\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=-\xi_2}$$

Интегрируя по поверхности каждой из макрочастиц, находим их заряды:

$$q_1 = \frac{1}{2}a_1\phi_1 + a\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1}}{\mathrm{sh}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)} \times$$
$$\times \left[\phi_1 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1}\,\mathrm{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2) - \phi_2 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2}\right]$$

$$q_2 = \frac{1}{2}a_2\phi_2 + a\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2}}{\mathrm{sh}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)} \times$$
$$\times \left[\phi_2 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2}\,\mathrm{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2) - \phi_1 e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1}\right]$$

Отсюда определим емкостные коэффициенты:

$$c_{11} = \frac{1}{2}a_1 + a\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(2\ell+1)\xi_1}\mathrm{cth}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)$$

$$c_{22} = \frac{1}{2}a_2 + a\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(2\ell+1)\xi_2}\mathrm{cth}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)$$

$$c_{12} = c_{21} = -a\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{e^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)}}{\mathrm{sh}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)}$$

Потенциальные коэффициенты:

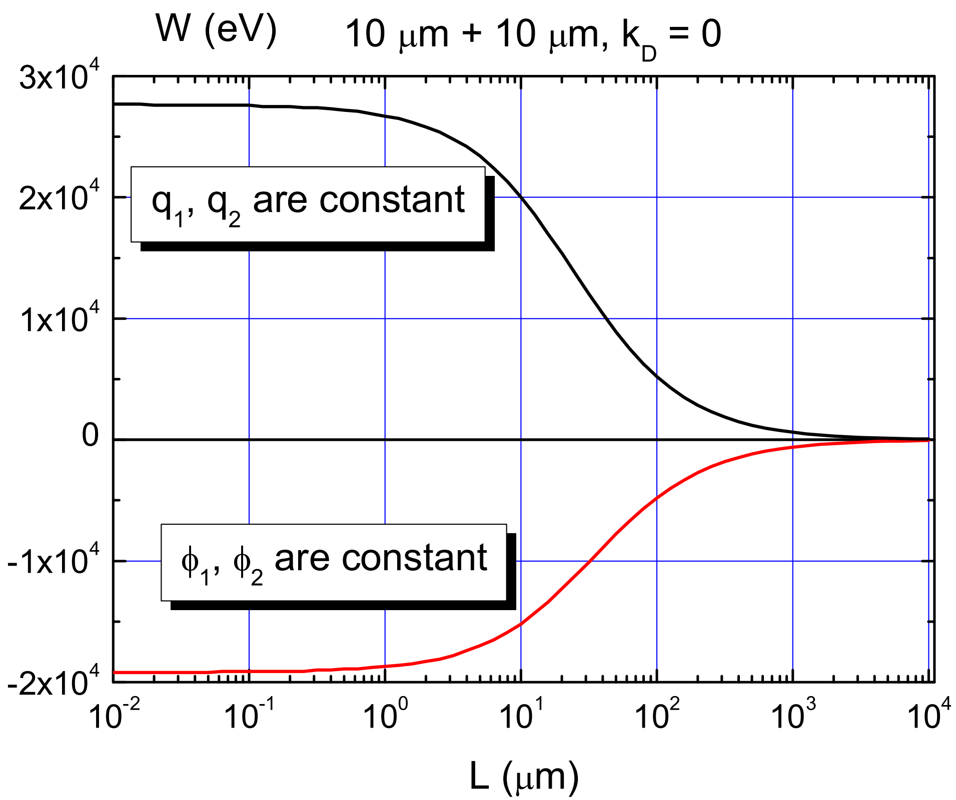
$$s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$
$$s_{12} = -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$
$$s_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

Электростатическая энергия системы двух макрочастиц

$$W = \frac{1}{2}c_{11}\phi_1^2 + c_{12}\phi_1\phi_2 + \frac{1}{2}c_{22}\phi_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}s_{11}q_1^2 + s_{12}q_1q_2 + \frac{1}{2}s_{22}q_2^2$$

Зависимость энергии двух макрочастиц одного размера от расстояния между их поверхностями



К единице поверхности проводника в электростатическом поле приложена сила

$$\mathbf{f}_{1\mathsf{suf}} = \mathbf{T}_{1\mathbf{n}} = \frac{E_1^2}{8\pi}\mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 \mathbf{E}_1$$

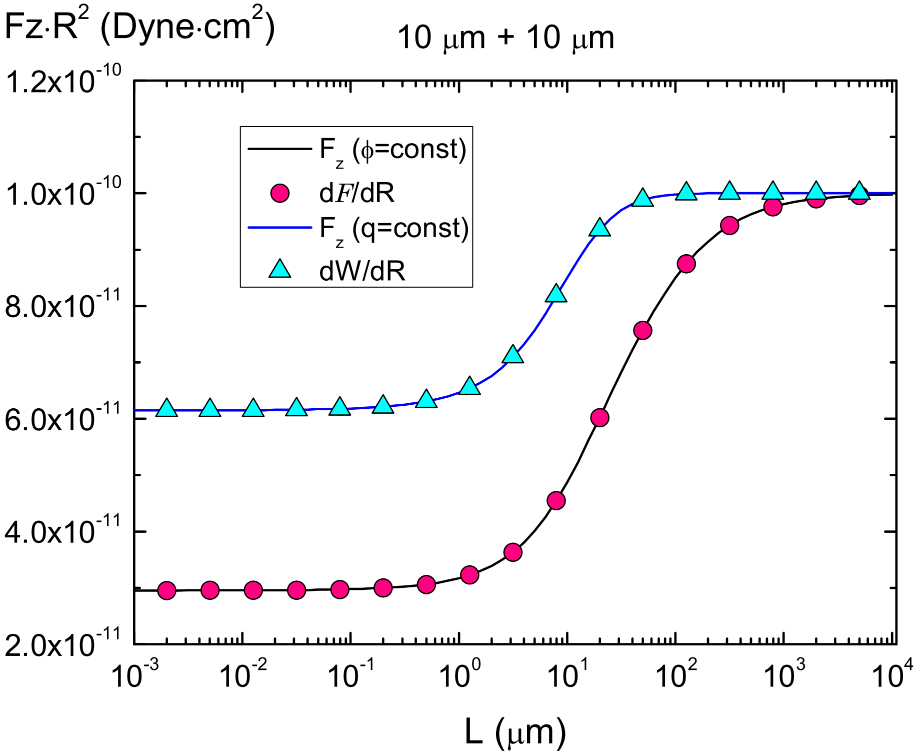
Поэтому для определения z-составляющей удельной силы имеем:

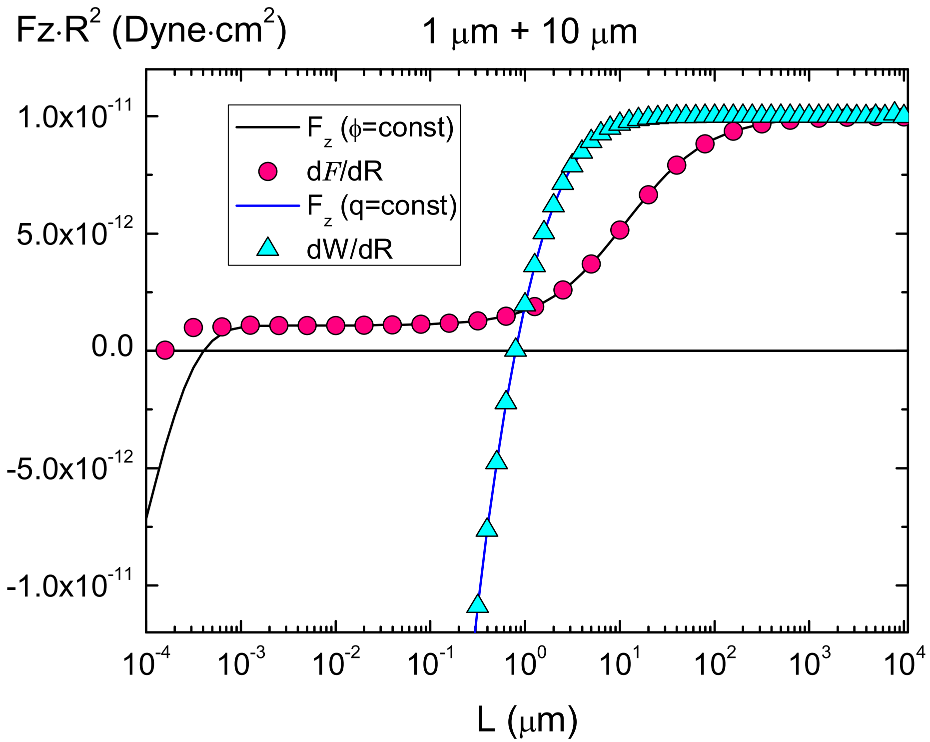
$$f_{z1} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 E_1 \cos\theta \equiv \tfrac{1}{2}\sigma_1 E_1 \frac{\operatorname{ch}\xi_1 \cos\eta - 1}{\operatorname{ch}\xi_1 - \cos\eta}$$

Далее расчеты проведены для одинаковых частиц $a_1 = a_2 = 10\,\mu$m и макрочастиц разного радиуса $a_1 = 10\,\mu$m, $a_2 = 1\,\mu$m

при $e\phi_{i0} \simeq 3T_e$, $eq_{i0} = \phi_{i0}a_i$, $i = 1, 2$, $T_e = 1$ eV

Зависимость силы взаимодействия двух макрочастиц от L





Точки получены дифференцированием энергии взаимодействия

Потенциальная энергия взаимодействия

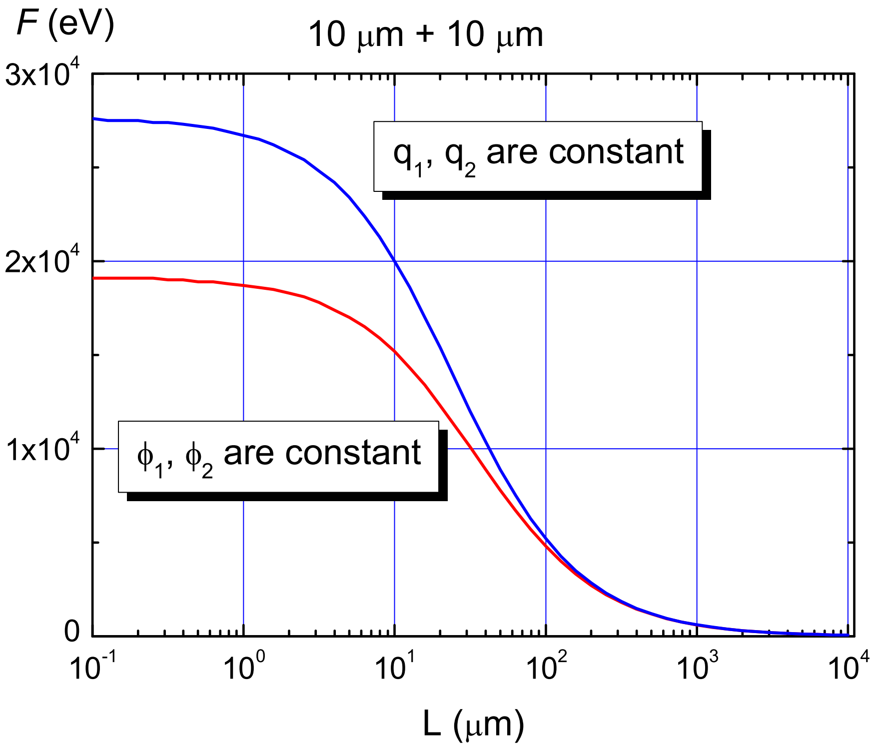
при постоянных зарядах:

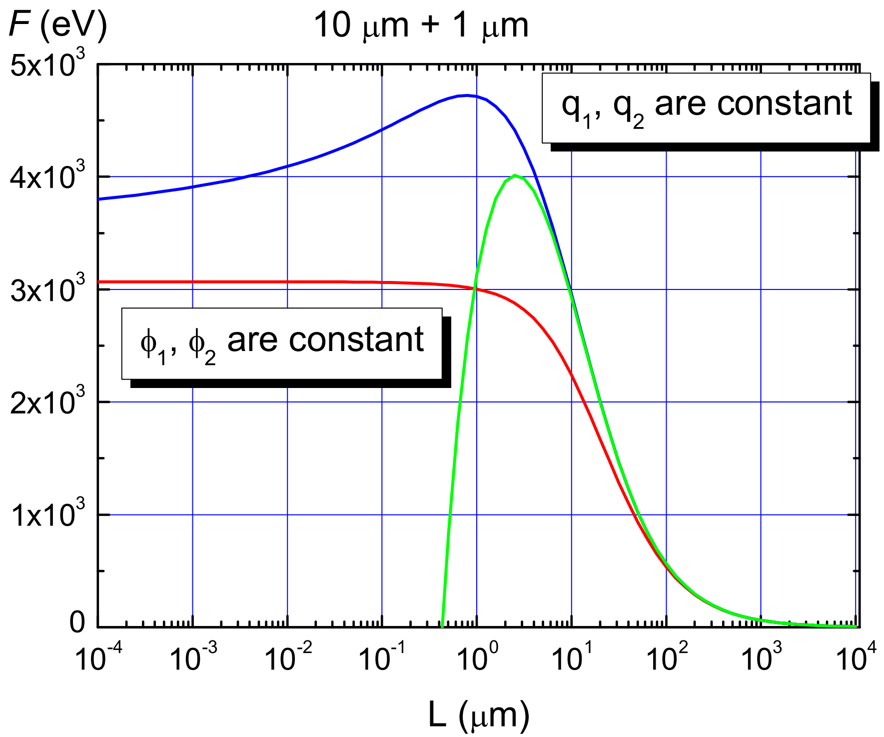
$$\mathcal{F}_q = \frac{1}{2}s_{11}q_{10}^2 + s_{12}q_{10}q_{20} + \frac{1}{2}s_{22}q_{20}^2 - \\ - \frac{1}{2}(q_{10}^2/a_1 + q_{20}^2/a_2)$$

при постоянных потенциалах:

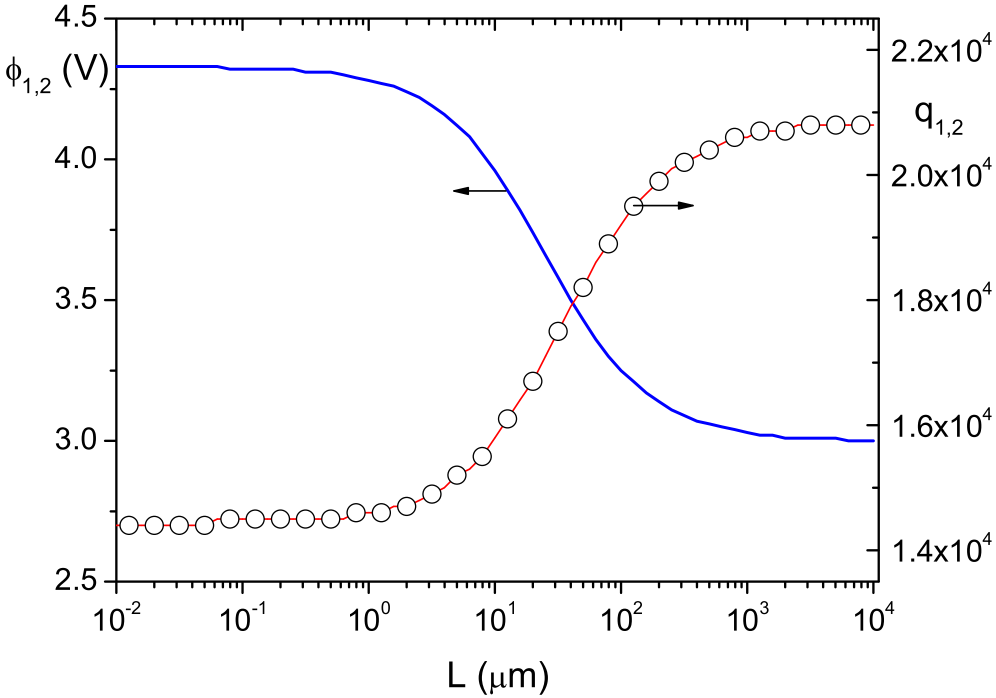
$$\mathcal{F}_\phi = \frac{1}{2}c_{11}\phi_{10}^2 + c_{12}\phi_{10}\phi_{20} + \frac{1}{2}c_{22}\phi_{20}^2 - \\ - (q_1 - q_{10})\phi_{10} - (q_2 - q_{20})\phi_{20} - \\ - \frac{1}{2}(\phi_{10}^2 a_1 + \phi_{20}^2 a_2)$$

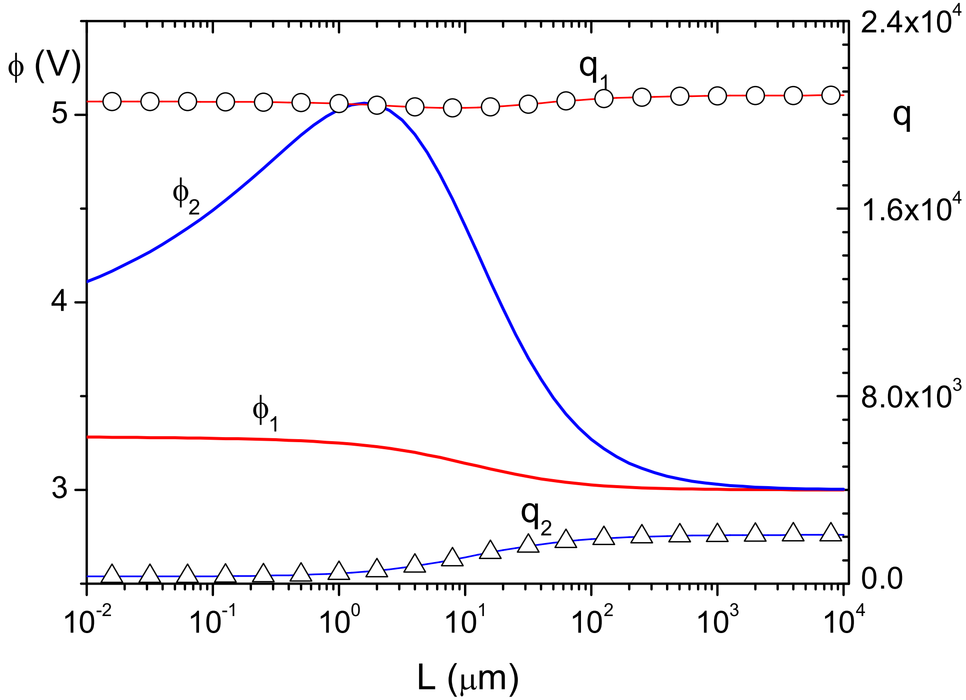
Потенциальная энергия взаимодействия двух макрочастиц





Заряды и потенциалы поверхности макрочастиц в зависимости от L





Выводы

1. Потенциал Юкавы с поправкой на размер макрочастиц является хорошим приближением вплоть до расстояний порядка нескольких радиусов макрочастиц.

2. В случае постоянного потенциала поверхности макрочастиц, энергия электрического поля не является потенциальной энергией взаимодействия. Необходим учет работы внешнего источника, поддерживающего потенциалы макрочастиц постоянными.

Спасибо за внимание