

# Уравнение состояния полностью ионизованной электрон-ионной плазмы: аналитические аппроксимации для астрофизических приложений

А.Ю. Потехин<sup>1</sup>, G. Chabrier<sup>2</sup>, F. J. Rogers<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Ecole Normale Supérieure de Lyon, CRAL, Lyon, France

<sup>3</sup>Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, California, USA

# Основные параметры

Концентрация электронов  $n_e$ , температура  $T$ , магнитная индукция  $B$ .

Концентрация ионов  $n_i$ ;  $n_e = \langle Z \rangle n_i$   $n_i = \sum_j n_j$   $\langle f \rangle = \sum_j x_j f_j$   $x_j \equiv \frac{n_j}{n_i}$

Параметр плотности  $r_s = a_e/a_0 = 1.172 n_{24}^{-1/3} = (\rho_0/\rho)^{1/3}$

$$a_e = \left( \frac{4}{3} \pi n_e \right)^{-1/3} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \quad n_{24} \equiv \frac{n_e}{10^{24} \text{ cm}^{-3}}$$

Плотность  $\rho = \frac{n_{24}}{1.66} \frac{A'}{\langle Z \rangle}$   $A' \equiv \langle A \rangle + A''$   $\rho_0 = 2.675 \frac{A'}{\langle Z \rangle} \text{ g cm}^{-3}$

$$R_S = a_i \frac{m_i (Ze)^2}{\hbar^2} = 1822.9 r_s A Z^{7/3} \quad a_i \equiv \left( \frac{4}{3} \pi n_i \right)^{-1/3} = a_e Z^{1/3}$$

Импульс Ферми  $p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3}$

Релятивизм:  $x_r = \frac{p_F}{m_e c} = 1.00884 \left( \frac{\rho_6 \langle Z \rangle}{A'} \right)^{1/3} = 0.014005 r_s^{-1}$   $\gamma_r \equiv \sqrt{1 + x_r^2}$

## Основные параметры (продолжение)

Кинетическая энергия Ферми

$$\epsilon_F = c \sqrt{(m_e c)^2 + p_F^2} - m_e c^2 = m_e c^2 (\gamma_T - 1)$$

Температура Ферми

$$T_F \equiv \frac{\epsilon_F}{k_B} = T_T (\gamma_T - 1) \approx \begin{cases} 1.163 \times 10^6 r_s^{-2} \text{ K} & (x_T \ll 1) \\ T_T x_T & (x_T \gg 1) \end{cases}$$

$$T_T \equiv \frac{m_e c^2}{k_B} = 5.93 \times 10^9 \text{ K} \quad \tau \equiv T/T_T \quad (\text{Не})\text{вырожденность: } \theta \equiv T/T_F$$

Параметры связи:

$$\Gamma_j = \frac{(Z_j e)^2}{a_j k_B T} = \Gamma_e Z_j^{5/3} \quad a_j = a_e Z_j^{1/3} \quad \Gamma = \Gamma_e \langle Z^{5/3} \rangle \quad \Gamma_e \equiv \frac{e^2}{a_e k_B T} \approx \frac{22.75}{T_6} \left( \rho_6 \frac{\langle Z \rangle}{A'} \right)^{1/3}$$

Тепловая длина волны де Бройля

$$\lambda_j = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_j k_B T} \right)^{1/2} \quad \lambda_e = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{1/2}$$

Ионная плазменная частота и температура

$$\omega_p = \left( 4\pi e^2 n_i \left\langle \frac{Z^2}{m_i} \right\rangle \right)^{1/2} \quad T_p \equiv \frac{\hbar \omega_p}{k_B} \approx 7.832 \times 10^6 \left( \frac{\rho_6}{A'} \left\langle \frac{Z^2}{A} \right\rangle \right)^{1/2} \text{ K}$$

Ионный квантовый параметр:

$$\eta = \frac{T_p}{T} \quad \text{ОКП: } \eta \approx 7.832 \frac{Z \sqrt{\rho_6}}{T_6 A}$$

# Разложение свободной энергии и основные термодинамические величины

$$F = F_{\text{id}}^{\text{i}} + F_{\text{id}}^{(e)} + F_{ee} + F_{\text{ii}} + F_{\text{ie}}$$

$$P = -(\partial F / \partial V)_T \quad S = -(\partial F / \partial T)_V \quad U = F + TS$$

$$C_V = (\partial S / \partial \ln T)_V \quad \chi_T = (\partial \ln P / \partial \ln T)_V \quad \chi_\rho = -(\partial \ln P / \partial \ln V)_T$$

## Идеальный газ ионов

$$F_{\text{id}}^{(j)} = N_j k_B T \left[ \ln(n_j \lambda_j^3 / g_j) - 1 \right] \quad F_{\text{id}}^{\text{i}} = \sum_j F_{\text{id}}^{(j)}$$

$$S_{\text{mix}} = -k_B \sum_j N_j \ln x_j$$

ОКП:  $F_{\text{id}}^{\text{i}} = N_i k_B T \left[ \ln(n_i \lambda_i^3 / g_i) - 1 \right]$

$$\frac{F_{\text{id}}^{\text{i}}}{N_i k_B T} = 3 \ln \eta - \frac{3}{2} \ln \Gamma - \frac{1}{2} \ln \frac{6}{\pi} - \ln g_i - 1$$

# Идеальный ферми-газ

$$F_{\text{id}}^{(e)} = \mu_e N_e - P_{\text{id}}^{(e)} V$$

$$P_{\text{id}}^{(e)} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{k_B T}{\lambda_e^3} \left[ I_{3/2}(\chi_e, \tau) + \frac{\tau}{2} I_{5/2}(\chi_e, \tau) \right] \quad n_e = \frac{4}{\sqrt{\pi} \lambda_e^3} \left[ I_{1/2}(\chi_e, \tau) + \tau I_{3/2}(\chi_e, \tau) \right]$$

$$I_\nu(\chi_e, \tau) \equiv \int_0^\infty \frac{x^\nu (1 + \tau x/2)^{1/2}}{\exp(x - \chi_e) + 1} dx \quad \chi_e = \frac{\mu_e}{k_B T}$$

$$\frac{U_{\text{id}}^{(e)}}{V} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{k_B T}{\lambda_e^3} \left[ I_{3/2}(\chi_e, \tau) + \tau I_{5/2}(\chi_e, \tau) \right]$$

S. I. Blinnikov, N. V. Dunina-Barkovskaya, D. K. Nadyozhin, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **106**, 171 (1996); erratum: *ibid.*, **118**, 603 (1998);  
G. Chabrier, A. Y. Potekhin, *Phys. Rev. E*, **58**, 4941 (1998).

# Идеальный ферми-газ

## Низкие температуры и высокие плотности

$$I_\nu(\chi, \tau) = I_\nu^{\text{nr}}(\chi) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!! \tau^{m+1}}{4^{m+1} m!} I_{\nu+m+1}^{\text{nr}}(\chi)$$

$$I_\nu^{\text{nr}}(\chi) = \int_0^\infty \frac{x^\nu dx}{e^{x-\chi} + 1} = \frac{\chi^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{\pi^2}{6} \nu \chi^{\nu-1} + \frac{7\pi^4}{360} \nu(\nu-1)(\nu-2) \chi^{\nu-3} + O(\chi^{\nu-5})$$

$$\frac{F_{\text{id}}^{(e)}}{V} \approx \frac{P_\Gamma}{8\pi^2} [x_\Gamma (1+2x_\Gamma^2) \gamma_\Gamma - \ln(x_\Gamma + \gamma_\Gamma)] - P_\Gamma \frac{x_\Gamma \gamma_\Gamma \tau^2}{6}$$
$$P_\Gamma \equiv m_e c^2 (m_e c / \hbar)^3 = 1.4218 \times 10^{25} \text{ dyn cm}^{-2}$$

$$x_\Gamma < 10^{-5} : \quad F_{\text{id}}^{(e)}/V \approx P_\Gamma x_\Gamma^5 / (10\pi^2) - P_\Gamma x_\Gamma \gamma_\Gamma \tau^2 / 6$$

Альтернатива – численный расчёт, создание таблиц и интерполяция:

F. X. Timmes, D. Arnett, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **125**, 277 (1999);

F. X. Timmes, F. D. Swesty, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **126**, 501 (2000).

# Обменно-корреляционное взаимодействие электронов

S. Tanaka, S. Mitake, S. Ichimaru, *Phys. Rev. A*, **32**, 1896 (1985);  
S. Ichimaru, H. Iyetomi, S. Tanaka, *Phys. Rep.*, **149**, 91 (1987).

## Ионная жидкость

Наилучшие численные расчёты внутренней энергии при  $1 < \Gamma < 190$ :  
J. M. Caillol, *J. Chem. Phys.*, **111**, 6538 (1999).

Формула Дебая–Хюккеля с поправками до  $O(\Gamma^{9/2} \ln \Gamma)$  включительно:  
E. G. D. Cohen, T. J. Murphy, *Phys. Fluids*, **12**, 1404 (1969).

Подгоночная формула, воспроизводящая расчёты Кайоля при  $1 < \Gamma < 190$  с относительной погрешностью порядка  $1/10^6$ , а также формулу Коэна–Мерфи при  $\Gamma < 0,3$ : A. Y. Potekhin, G. Chabrier, *Phys. Rev. E*, **62**, 8554 (2000):

## Квантовые поправки

J. P. Hansen, *Phys. Rev. A*, **8**, 3096 (1973): 
$$\frac{F_{\text{WK}}}{N_i k_B T} = \frac{\eta^2}{24}$$

Следующий порядок – J. P. Hansen, P. Vieillefosse, *Phys. Lett. A*, **53**, 187 (1975).

## Кулоновский (вигнеровский) кристалл

В гармоническом приближении  $F_{\text{lat}} = U_M + U_q + 3N_i k_B T \langle \ln[1 - \exp(-\hbar\omega_{\mathbf{k}s}/k_B T)] \rangle_{\text{ph}}$

$$U_M = N_i C_M (Ze)^2 / a_i \quad U_q = \frac{3}{2} N_i \hbar \omega_p u_1 \quad u_1 = \langle \omega_{\mathbf{k}s} \rangle_{\text{ph}}$$

С учётом ангармонических поправок,  $\frac{F_{\text{lat}}}{N_i k_B T} = C_M \Gamma + 1.5 u_1 \eta + f_{\text{th}} + f_{\text{ah}}$

$f_{\text{th}}$ : D. A. Baiko, A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev, 2001, *Phys. Rev. E*, **64**, 057402

## Ангармонические поправки

R. T. Farouki, S. Hamaguchi, 1993, *Phys. Rev. E*, **47**, 4330:  $f_{\text{ah}}^{(0)}(\Gamma) = - \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{k \Gamma^k}$

## Квантовые ангармонические поправки

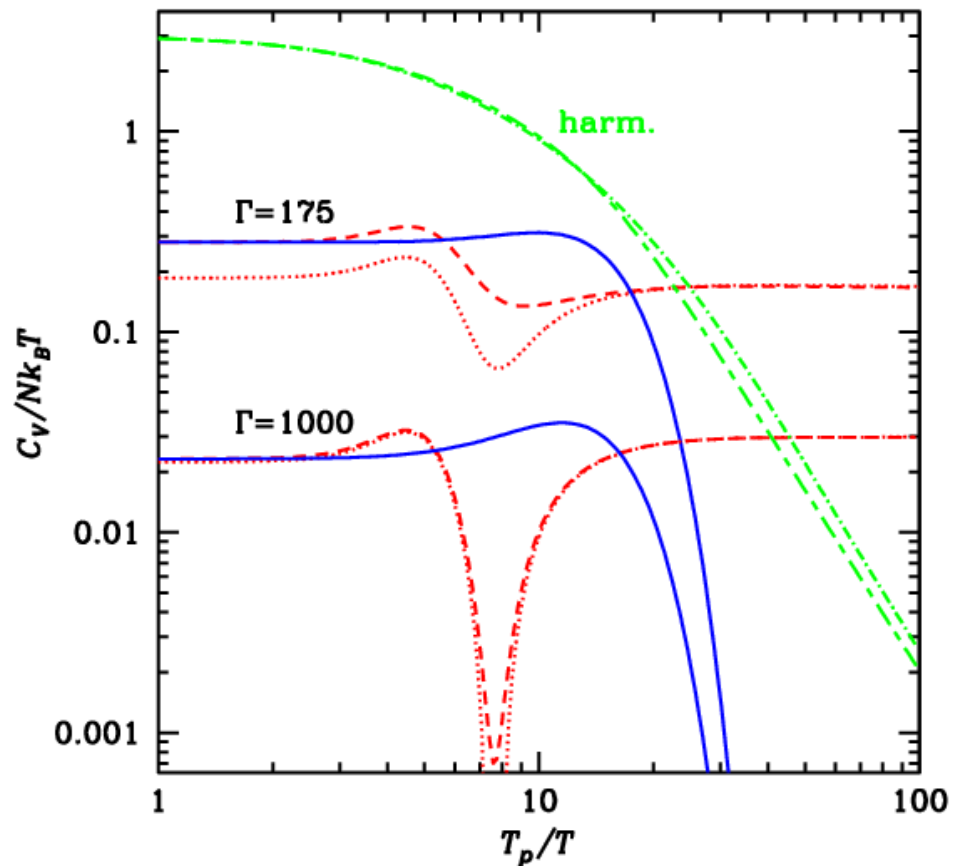
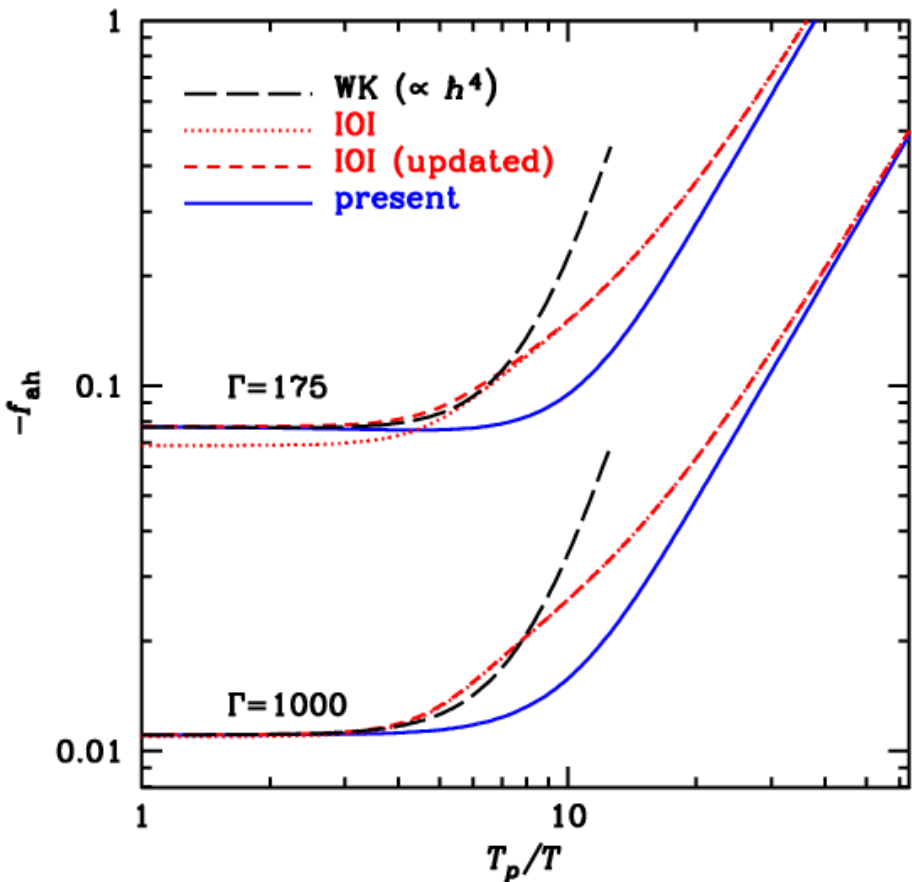
J. P. Hansen, P. Vieillefosse, *Phys. Lett. A*, **53**, 187 (1975):  $f_{\text{ah}}^{(4)}(\Gamma, \eta) = f_{\text{ah}}^{(0)}(\Gamma) - (0.0018046/\Gamma + 0.085072/\Gamma^2) \eta^4$

W. J. Carr, Jr., R. A. Coldwell-Horsfall, A. E. Fein, *Phys. Rev.*, **124**, 747 (1961):  $u_{\text{ah}, T \rightarrow 0} = -\frac{b_1 \eta^2}{\Gamma} \quad b_1 = 0, 12$

$$f_{\text{ah}} = f_{\text{ah}}^{(0)}(\Gamma) e^{-c_1 \eta^2} - \frac{b_1 \eta^2}{\Gamma} \quad c_1 = b_1 / a_1 \approx 0.0112$$



# Ангармонические поправки



**WK** (Wigner – Kirkwood): J. P. Hansen & P. Vieillefosse, *Phys. Lett. A*, **53**, 187 (1975).

**IOI**: H. Iyetomi, S. Ogata, S. Ichimaru, *Phys. Rev. B*, **47**, 11703 (1993).

# Электрон-ионное взаимодействие

## Поляризация электронов в кулоновской жидкости

А. У. Potekhin, G. Chabrier, 2000,  
*Phys. Rev. E*, **62**, 8554:  
расчёты в гиперцепном  
(HNC) приближении и  
подгонка.

$$f_{ie} \equiv \frac{F_{ie}}{N_i k_B T} = -\Gamma_e \frac{c_{DH} \sqrt{\Gamma_e} + c_{TF} a \Gamma_e^\nu g_1(r_s, \Gamma_e) g_3(x_r)}{1 + [b \sqrt{\Gamma_e} + a g_2(r_s, \Gamma_e) \Gamma_e^\nu / r_s] \gamma_r^{-1}}$$
$$c_{DH} = (Z/\sqrt{3}) [(1+Z)^{3/2} - 1 - Z^{3/2}]$$

## Поляризация электронов в кулоновском кристалле

Для потенциала Юкавы – S. Hamaguchi, R. T. Farouki, D. H. E. Dubin, *Phys. Rev. E.*, **56**, 4671 (1997).

В гармоническом приближении – D. A. Baiko, *Phys. Rev. E.*, **66**, 056405 (2002).

Квазиклассическая теория возмущений – Potekhin & Chabrier (2000) .

$$f_{ie} = -f_\infty(x_r) \Gamma [1 + A(x_r) (Q(\eta)/\Gamma)^S]$$

$$Q(\eta) = \left( \frac{\ln(1 + e^{(q\eta)^2})}{\ln(e - (e - 2)e^{-(q\eta)^2})} \right)^{1/2}$$

# Плазма в квантующем магнитном поле

## Основные параметры

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e c} \quad \beta = \frac{\hbar \omega_c}{m_e e^4 / \hbar^2} = \frac{B}{2.3505 \times 10^9 \text{ G}} \quad b = \frac{\hbar \omega_c}{m_e c^2} = \alpha^2 \beta = \frac{B}{4.414 \times 10^{13} \text{ G}}$$

Магнитная длина  $a_m = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} = \frac{a_0}{\sqrt{\beta}}$       Уровни Ландау:  $\epsilon_n = m_e c^2 (\sqrt{1 + 2bn} - 1)$

Ионная циклотронная частота:  $\omega_{ci} = Z (m_e / m_i) \omega_c$

Параметры сильного магнитного квантования для электронов:

$$\rho_B = 7045 \frac{A'}{Z} B_{12}^{3/2} \quad T_B = 1.343 \times 10^8 B_{12} \text{ K} \quad T'_B = T_B / \gamma_r$$

$$p_F = 2\pi^2 a_m^2 \hbar n_e \quad x_B = 2x_r^3 / 3b$$

Условия прямого влияния магнитного поля на ионы в кулоновском кристалле  
(Д. А. Байко, диссертация к.ф.-м.н., 2000):

$$\begin{cases} \omega_{ci} \gtrsim \omega_p \\ \hbar \omega_{ci} \gtrsim k_B T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_{12} \gtrsim 100 \sqrt{\rho_6} \\ B_{12} \gtrsim T / 10^5 \text{ K} \end{cases}$$

## Невырожденные нерелятивистские ионы в квантующем магнитном поле

$$F_{\text{id}}^i = N_i k_B T \left\{ \ln(2\pi a_m^2 \lambda_i n_i) + \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega_{ci}}{k_B T} \right) \right] - 1 \right\} + \Delta F$$
$$\Delta F = N_i \left\{ \frac{1}{2} \hbar \omega_{ci} - k_B T \ln \left[ 2 \text{ch} \left( \frac{g}{4} \frac{\hbar \omega_{ci}}{k_B T} \right) \right] \right\}$$

## Электроны в квантующем магнитном поле

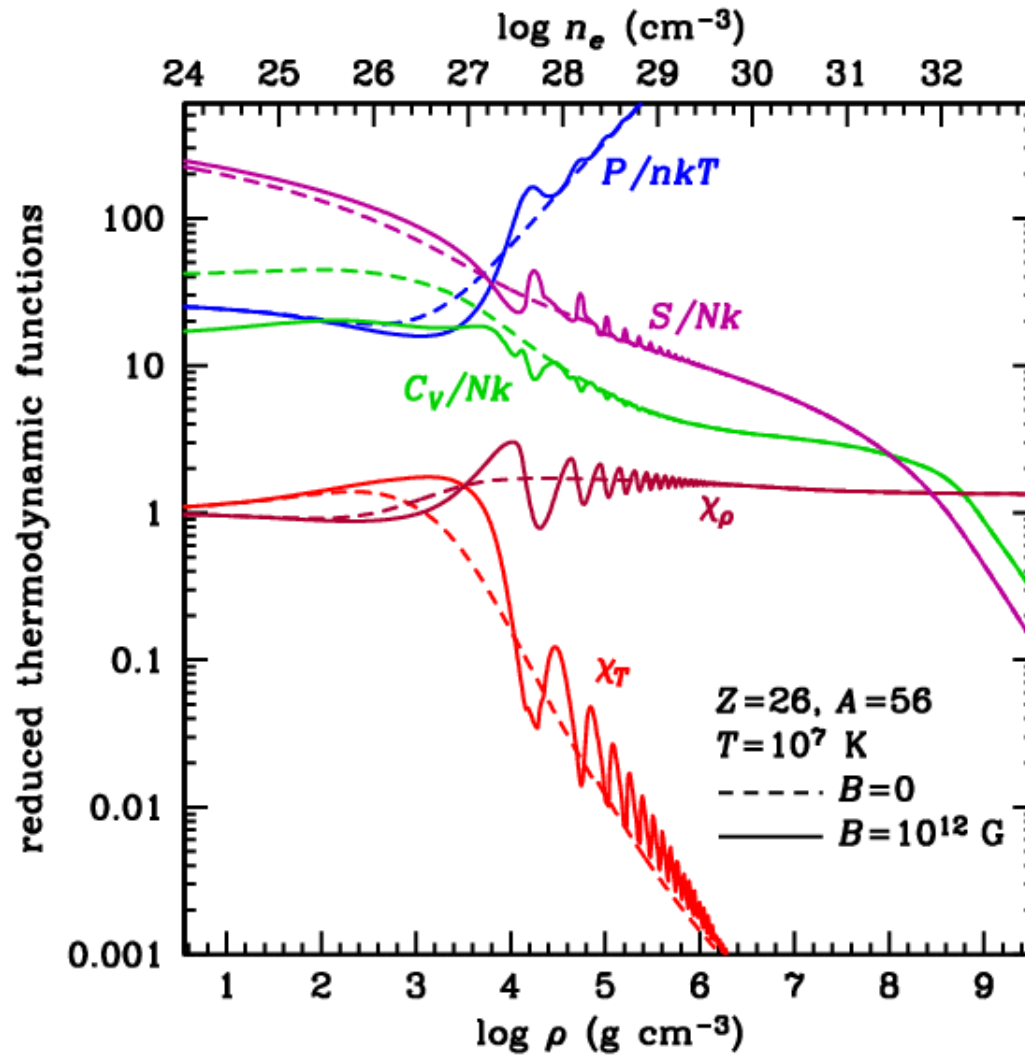
$$F_{\text{id}}^{(e)} = \mu_e N_e - P_{\text{id}}^{(e)} V$$
$$P_{\text{id}}^{(e)} = \frac{k_B T}{\pi^{3/2} a_m^2 \lambda_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} (1+2bn)^{1/4} I_{1/2}(\chi_n, \tau_n)$$
$$n_e = \frac{1}{\pi^{3/2} a_m^2 \lambda_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} (1+2bn)^{1/4} \frac{\partial I_{1/2}(\chi_n, \tau_n)}{\partial \chi_n}$$
$$\tau_n = \tau / \sqrt{1 + 2bn}, \quad \chi_n = \chi_e + \tau^{-1} - \tau_n^{-1}$$

## Обмен и корреляция

Интерполяция между разными предельными случаями:

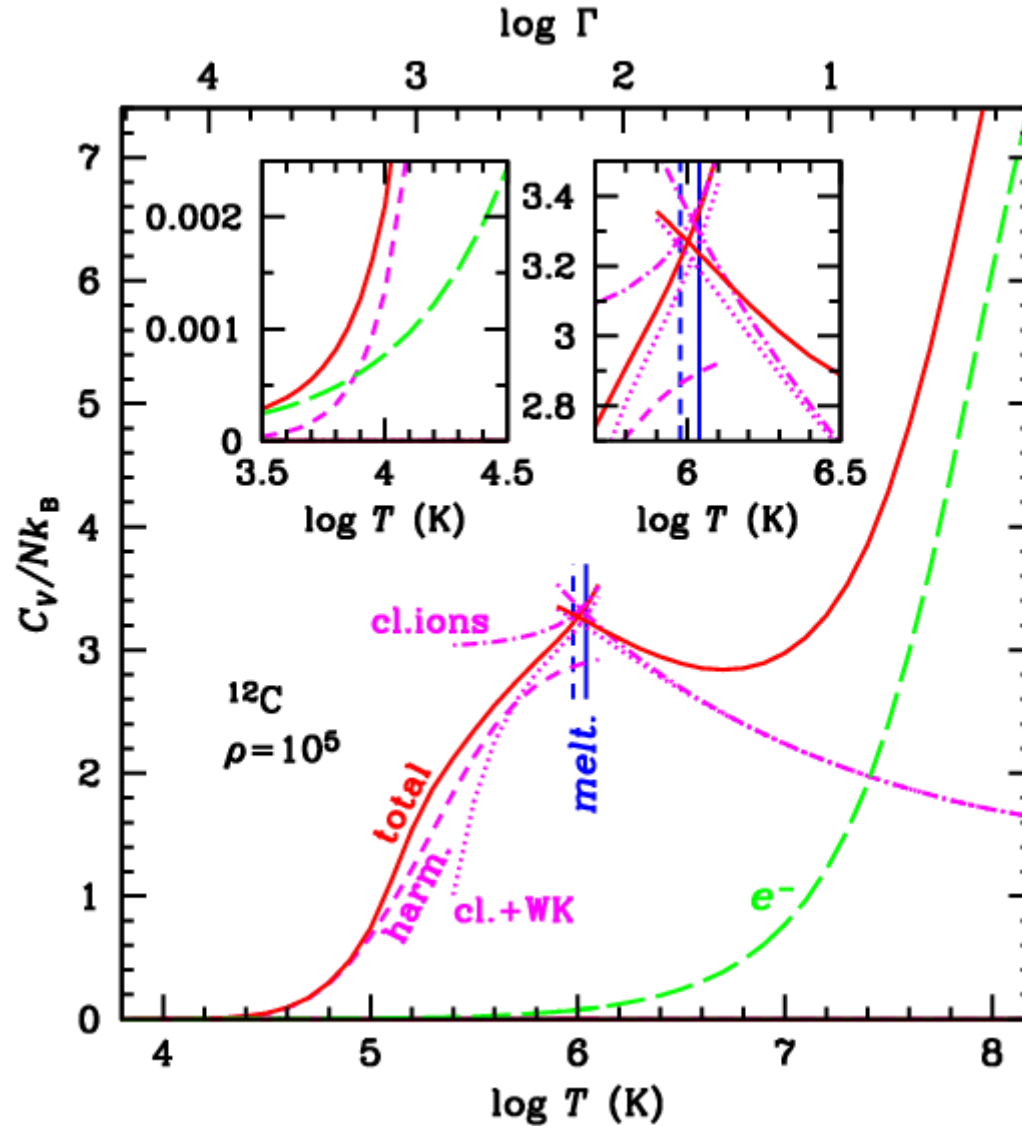
A. Y. Potekhin, G. Chabrier, Yu. A. Shibano, *Phys. Rev. E*, 60, 2193 (1999).

# Уравнение состояния в оболочке нейтронной звезды



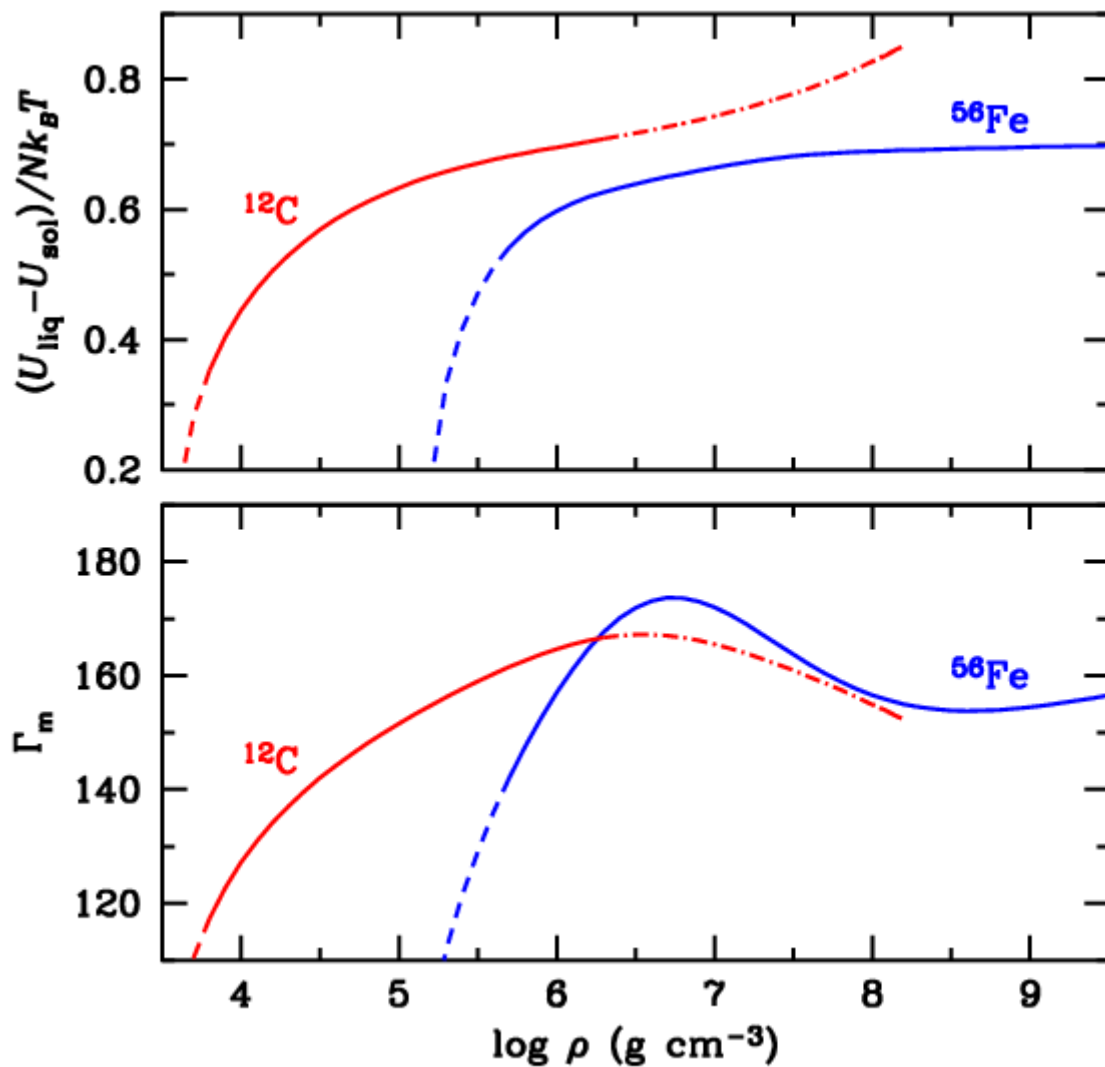
Нормированные термодинамические функции полностью ионизованного железа без магнитного поля и в сильном магнитном поле

# Теплоёмкость белого карлика или оболочки нейтронной звезды



Различные вклады в теплоёмкость углерода при плотности  $10^5 \text{ г см}^{-3}$

# Теплота плавления белого карлика или оболочки нейтронной звезды



Верхний рисунок: теплота плавления углерода и железа в зависимости от плотности.

Нижний рисунок: значение параметра кулоновской связи  $\Gamma$  в точке плавления.

# Уравнение состояния классической многокомпонентной кулоновской плазмы

## Сильнонеидеальная кулоновская плазма

Для каждой компоненты  $j$  можно написать

$$f_{\text{ex}} \equiv \frac{F_{\text{ex}}}{N_i k_B T} = f_{\text{ii}} + f_{\text{ie}} + Z_j f_{\text{ee}}$$

## Правило линейного смешивания

$$f_{\text{ex}}^{\text{LM}}(\Gamma) \approx \sum_j x_j f_{\text{ex}}(\Gamma_j, x_j = 1), \quad \Gamma_j = \Gamma \frac{Z_j^{5/3}}{\langle Z^{5/3} \rangle}$$

## Слабонеидеальная кулоновская плазма

### Приближение Дебая–Хюккеля

$$f_{ee}^{\text{DH}} = -\frac{\Gamma_e^{3/2}}{\sqrt{3}}$$

$$f_{ii}^{\text{DH}} = f_{ee}^{\text{DH}} \zeta_{ii}^{\text{DH}}, \quad \zeta_{ii}^{\text{DH}} = \frac{\langle Z^2 \rangle^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2}}$$



## Приближение Дебая–Хюккеля

$$f_{ii}^{\text{DH}} = f_{ee}^{\text{DH}} \zeta_{ii}^{\text{DH}}, \quad \zeta_{ii}^{\text{DH}} = \frac{\langle Z^2 \rangle^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2}}, \quad f_{\text{ex}}^{\text{DH}} = f_{ee}^{\text{DH}} \zeta_{\text{eip}}^{\text{DH}}, \quad \zeta_{\text{eip}}^{\text{DH}} = \frac{(\langle Z^2 \rangle + \langle Z \rangle)^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2}}.$$

## Правило линейного смешивания

$$f_{ii}^{\text{LM}} \sim f_{ee}^{\text{DH}} \zeta_{ii}^{\text{LM}}, \quad \zeta_{ii}^{\text{LM}} = \langle Z^{5/2} \rangle, \quad f_{\text{ex}}^{\text{LM}} \sim f_{ee}^{\text{DH}} \zeta_{\text{eip}}^{\text{LM}}, \quad \zeta_{\text{eip}}^{\text{LM}} = \langle Z(Z+1)^{3/2} \rangle.$$

## Варианты интерполяции

Д. К. Надёжин, А. В. Юдин, *Письма в Астрон. журн.*, **31**, 271 (2005)

(а) «модель среднего иона»

(б) модифицированный закон линейного смешивания

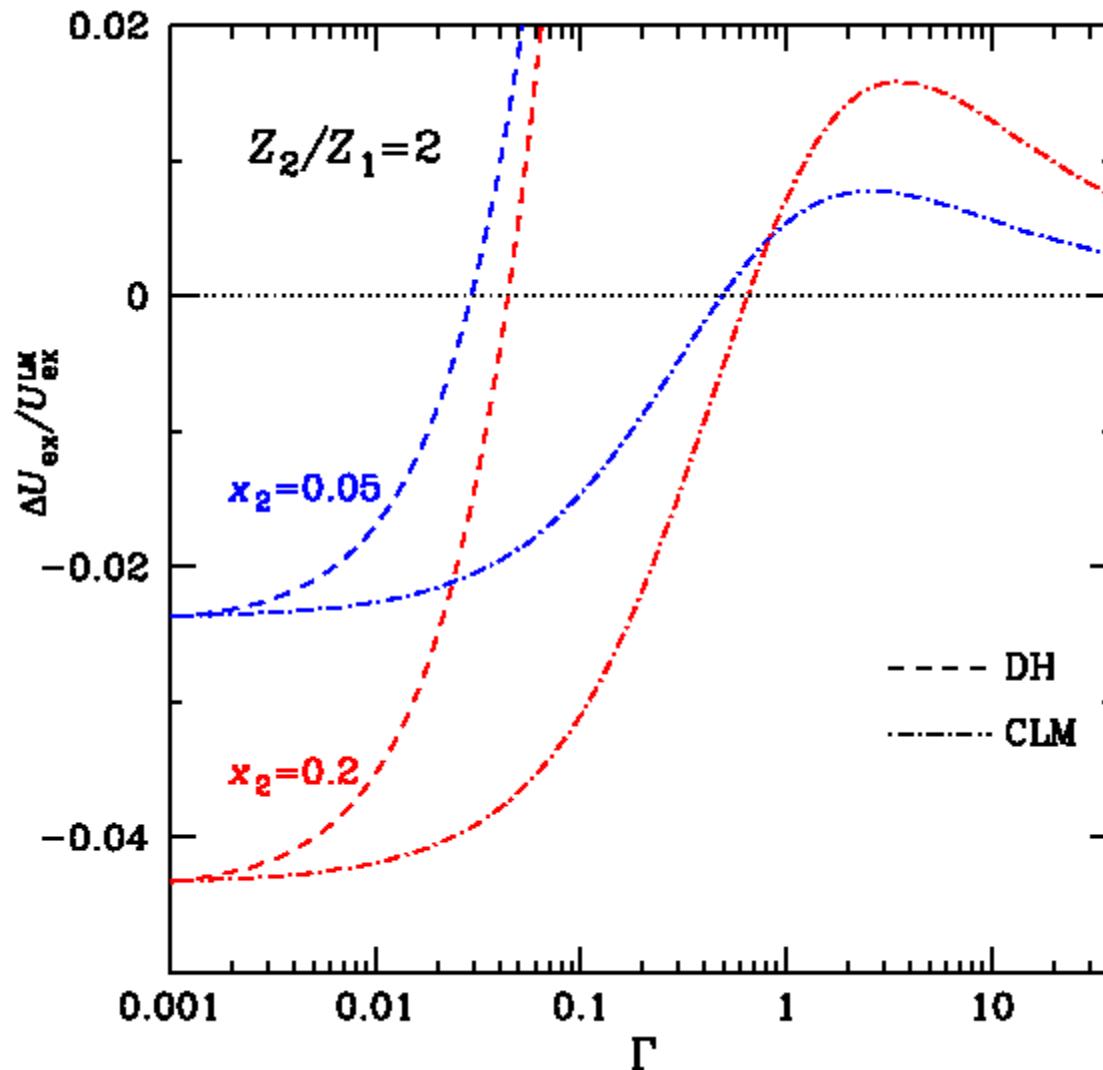
$$f_{ii} = \sum_j x_j f_{ii}(\Gamma_j, x_j = 1; d_j) \quad (б_1) \quad d_j = \frac{\langle Z^2 \rangle^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2} \langle Z^{5/2} \rangle} \quad (б_2) \quad d_j = \sqrt{\frac{\langle Z^2 \rangle}{Z_j \langle Z \rangle}}$$

(в) «сложное смешивание»

$$f_{ii} = \frac{1}{\langle Z \rangle} \sum_{jk} x_j x_k \tilde{Z}_{jk} f_{ii}(\Gamma_{jk}; d_{jk})$$

$$\Gamma_{jk} = \frac{2Z_j Z_k e^2}{(a_j + a_k) k_B T} \quad \tilde{Z}_{jk} = \left[ \frac{Z_j^{1/3} + Z_k^{1/3}}{2} \right]^3 \quad d_{jk} = \sqrt{\frac{Z_j Z_k \langle Z \rangle}{\langle Z^2 \rangle \tilde{Z}_{jk}}}$$

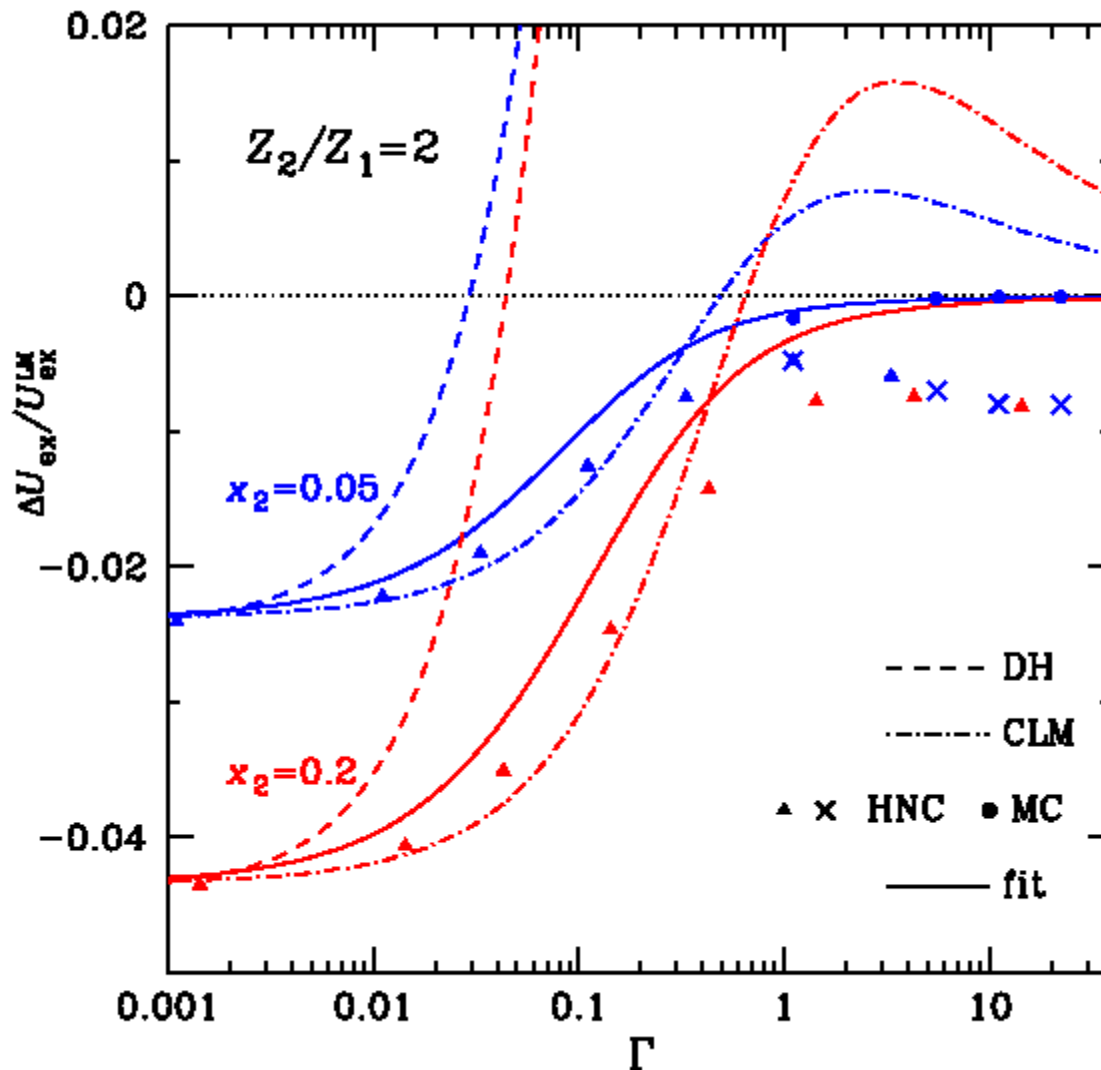
# Внутренняя энергия двухкомпонентной плазмы



**Штриховые** линии – приближение Дебая – Хюккеля.

**Штрих-пунктир** – «модифицированное линейное смешивание».

# Внутренняя энергия двухкомпонентной плазмы



MC (●): H. DeWitt, W. Slattery, G. Chabrier, *Physica B*, **228**, 158 (1996).

HNC: x – G. Chabrier, N. W. Ashcroft, *Phys. Rev. A*, **42**, 2284 (1990); ▲ – 2008.

Сплошные линии – предлагаемая аппроксимация

## Аппроксимация численных расчётов

$$\Delta f \equiv f - f^{\text{LM}} = f_{ee}^{\text{DH}} \frac{\zeta^{\text{DH}} - \zeta^{\text{LM}}}{(1 + a\Gamma^b)^c}$$

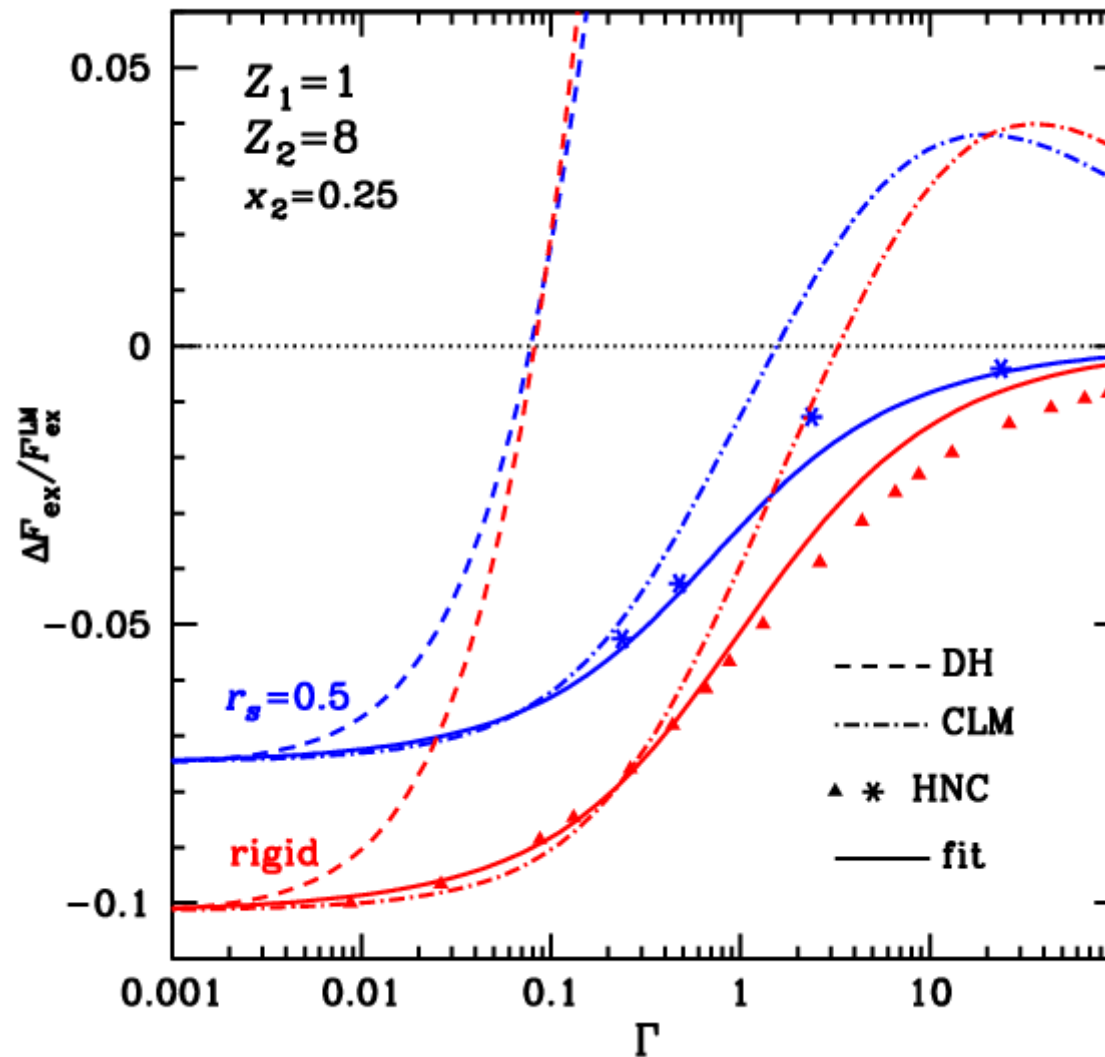
$$a = \frac{2.2\delta + 17\delta^4}{1 - b}, \quad \delta = \frac{\zeta^{\text{LM}} - \zeta^{\text{DH}}}{\langle Z^{5/2} \rangle},$$

$$b = d^{-0.2}, \quad c = 1 + d/6, \quad d = \langle Z^2 \rangle / \langle Z \rangle^2.$$

$$\Delta u = \left( \frac{3}{2} - \frac{abc\Gamma^b}{1 + a\Gamma^b} \right) \Delta f,$$

$$\Delta c = \left( \frac{abc\Gamma^b}{1 + a\Gamma^b} - \frac{1}{2} \right) \Delta u - \frac{ab^2c\Gamma^b}{(1 + a\Gamma^b)^2} \Delta f.$$

# Свободная энергия двухкомпонентной плазмы

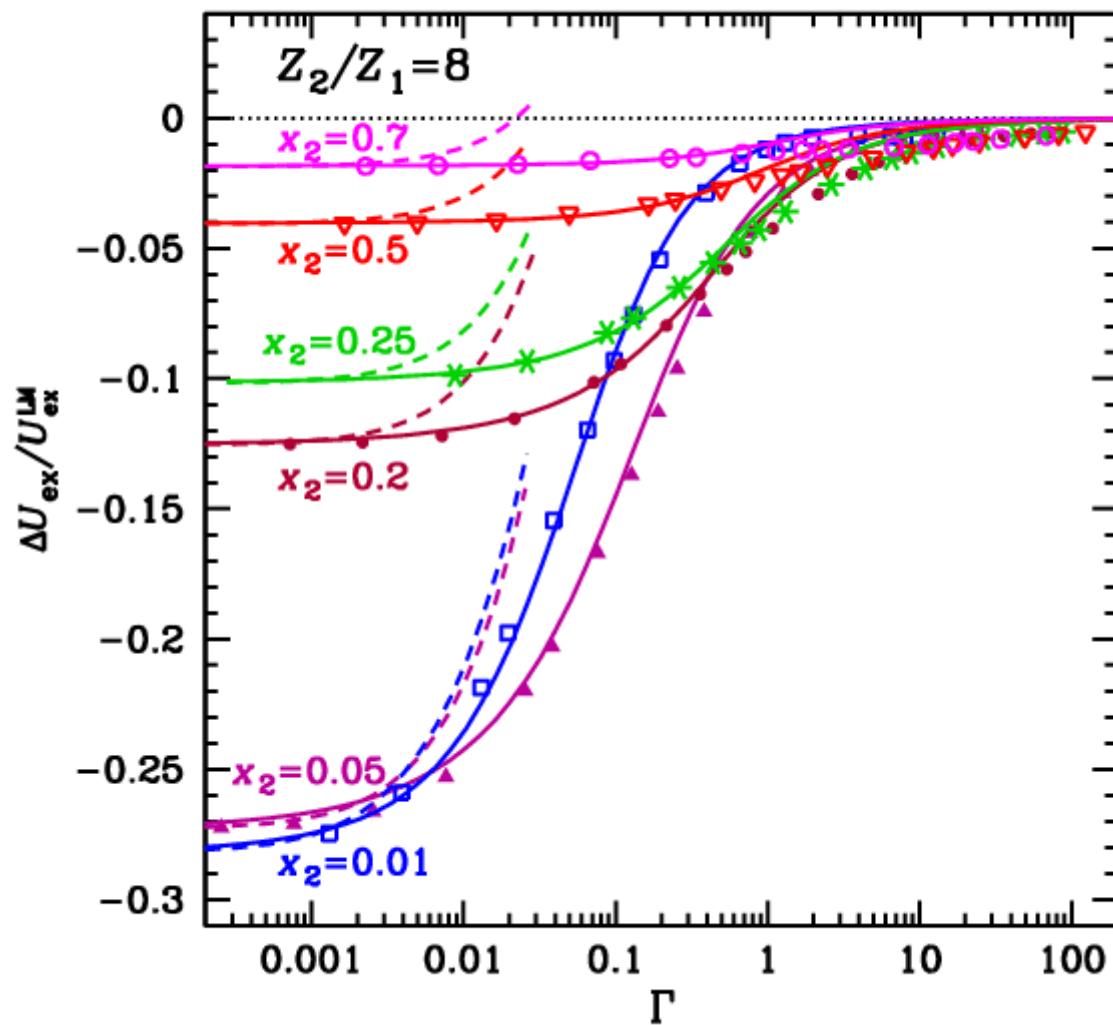


Звёздочки – G. Chabrier, N. W. Ashcroft, *Phys. Rev. A*, **42**, 2284 (1990).

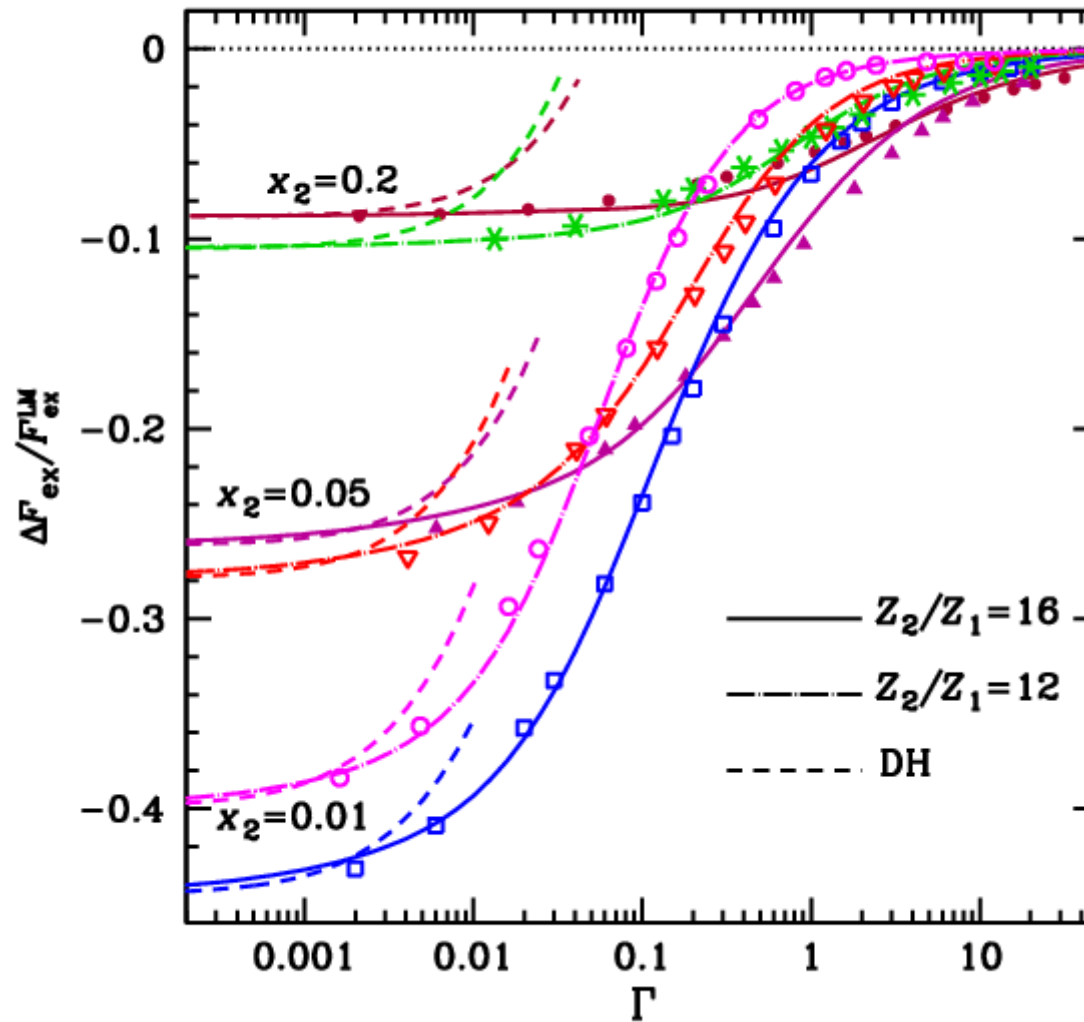
Треугольники – расчёты в гиперцепном приближении (2008).

Сплошные линии – предлагаемая аппроксимация.

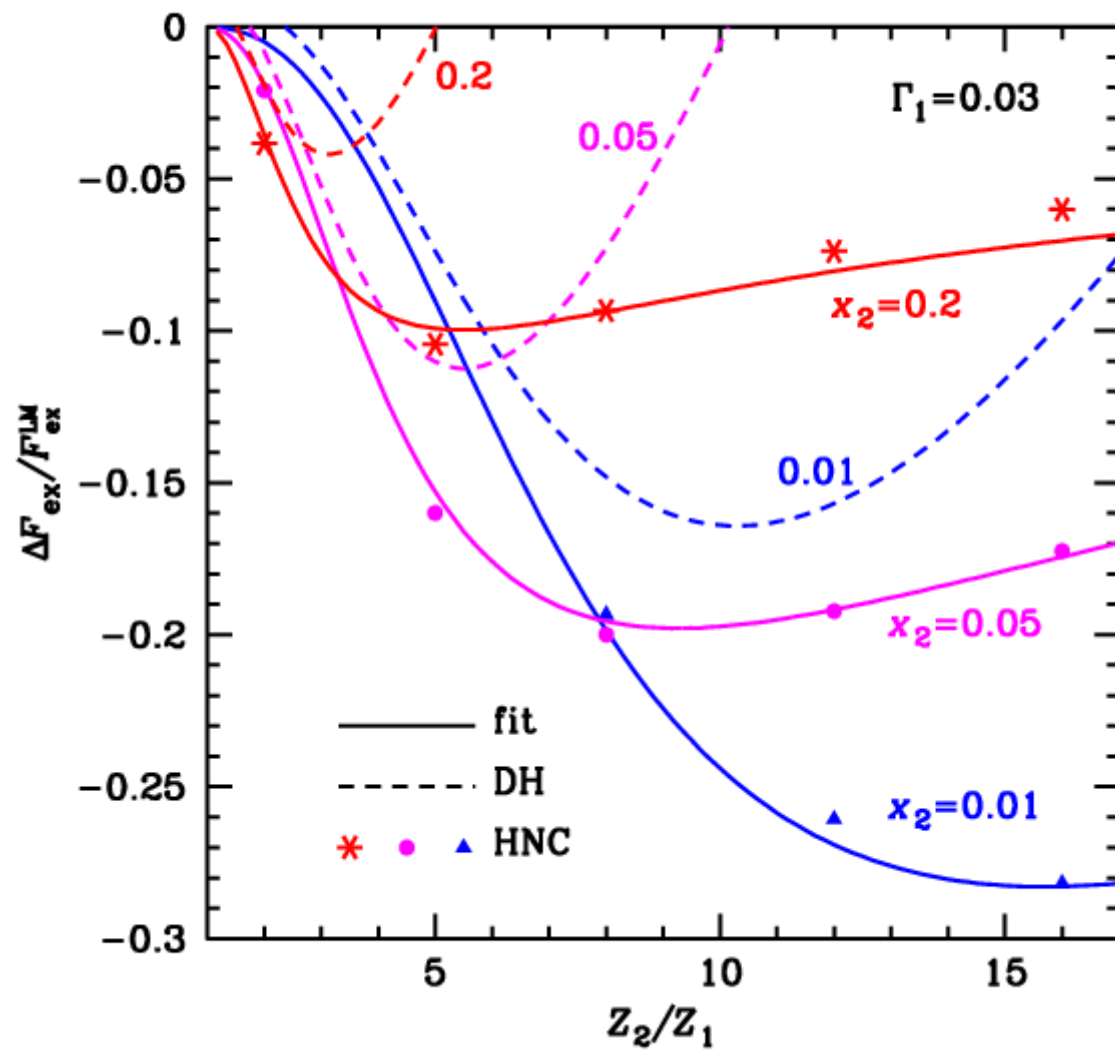
# Внутренняя энергия двухкомпонентной плазмы



# Свободная энергия двухкомпонентной плазмы

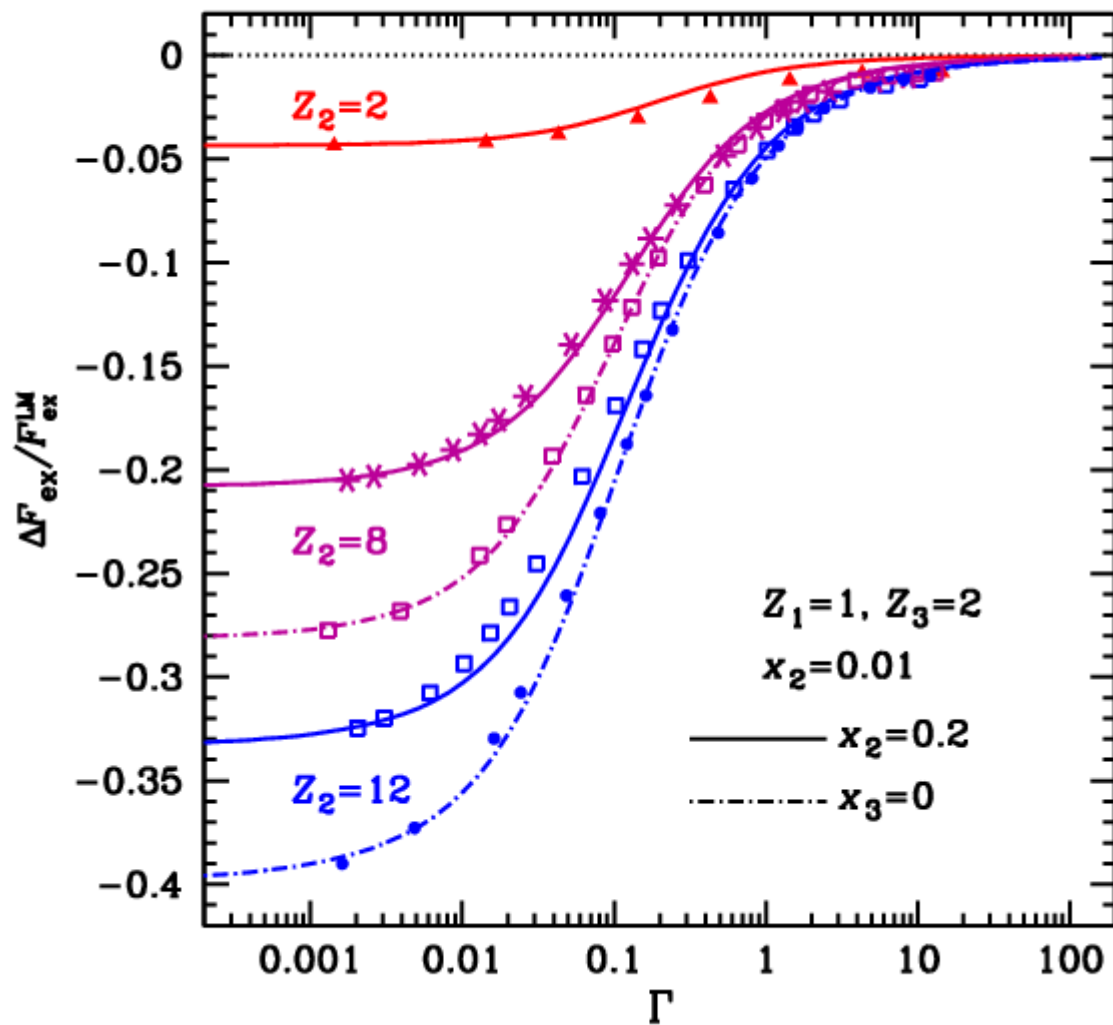


# Свободная энергия двухкомпонентной плазмы

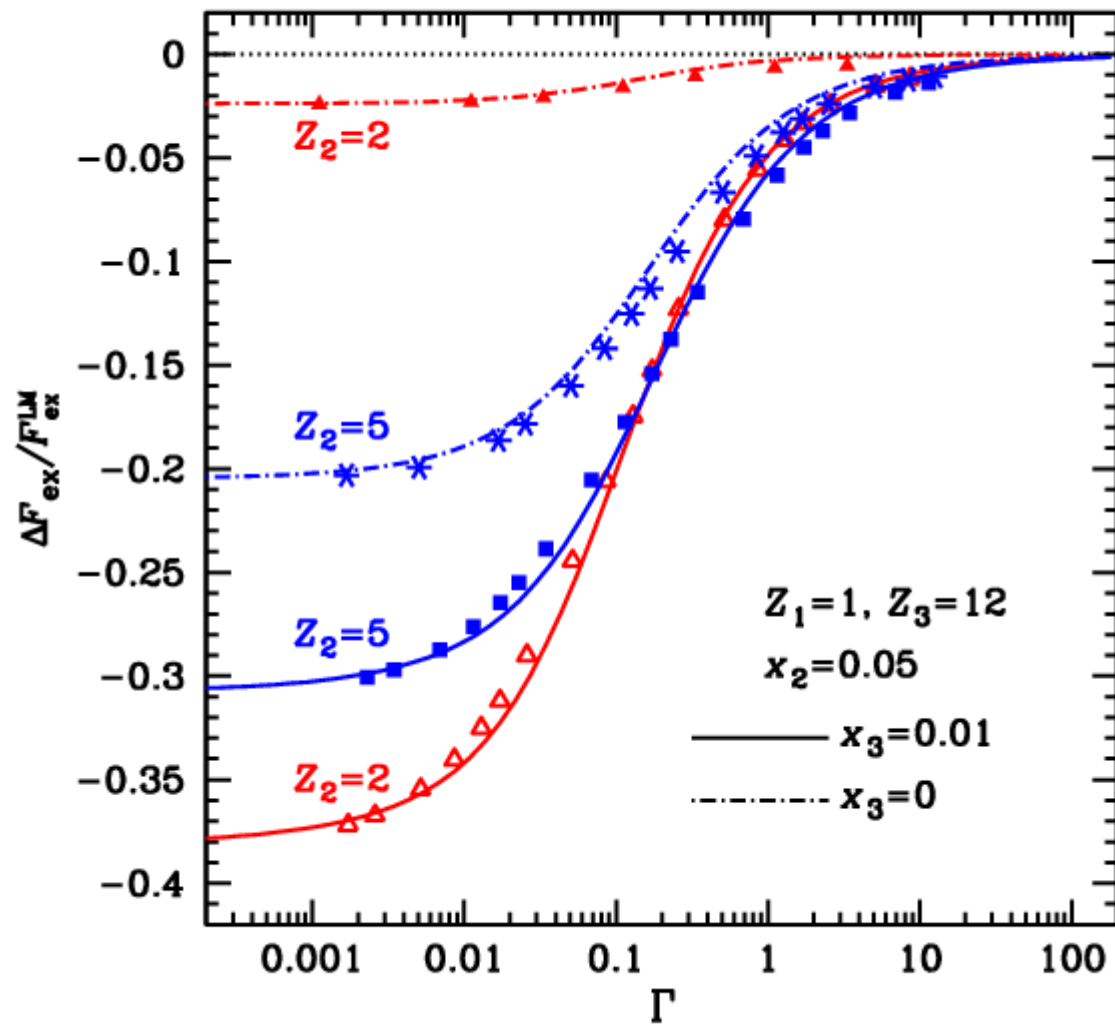




# Проверка для трёхкомпонентной плазмы



# Свободная энергия трёхкомпонентной плазмы



# Заключение

- Систематически рассмотрены и отобраны **подгоночные формулы** для расчёта свободной энергии полностью ионизованной неидеальной кулоновской плазмы (в газообразном, жидком и твёрдом состояниях, без магнитного поля и в квантующем магнитном поле).
- Построена простая формула для интерполяции свободной энергии **ионной смеси** между режимами сильной связи (линейного смешивания) и слабой связи (Дебая–Хюккеля). Данная формула согласуется с расчётами для двухкомпонентных смесей в гиперцепном приближении с точностью, сравнимой с точностью этого приближения.
- Выражения для свободной энергии вместе с их первыми и вторыми производными реализованы в компьютерных программах на Фортране для вычисления термодинамических функций первого и второго порядка. Набор созданных программ сделан общедоступным через Интернет по адресу <http://www.ioffe.ru/astro/EIP/>